А. А. Логунов

К работам *Анри Пуанкаре* О ДИНАМИКЕ ЭЛЕКТРОНА

А. А. Логунов

К работам *Анри Пуанкаре* «О ДИНАМИКЕ ЭЛЕКТРОНА»

МОСКВА – 1984

УДК 530.12

Монография А.А. Логунова "К работам Анри Пуанкаре "О динамике электрона", изданная Институтом ядерных исследований АН СССР, привлекла большое внимание специалистов. Выполняя многочисленные просьбы читателей, типографией Московского университета выпущен повторный тираж.

К 130-летию со дня рождения
выдающегося математика,
механика и физика-теоретика
Анри Пуанкаре

Содержание

Предисловие

В апреле 1984 года исполняется 130 лет со дня рождения величайшего математика, механика и физика-теоретика Анри Пуанкаре.

В настоящей работе мы хотели бы отдать дань необычайно разностороннему и глубокому таланту этого выдающегося ученого и философа-естествоиспытателя, чьи труды оставили ярчайший след во многих областях современной науки. Мы не ставили перед собою цель рассказать о всех работах А.Пуанкаре хотя бы даже только в физике, поскольку это требовало бы весьма большой и серьезной работы.

Мы ограничились лишь рассмотрением двух его статей под общим названием "О динамике электрона", опубликованных в 1905–1906 годах, в самом начале XX века, на рубеже коренной ломки ряда установившихся принципов теоретической физики, которые завершают им же провозглашенную задачу преодоления назревшего кризиса классической физики на основе полного отказа от концепций абсолютного движения, абсолютного простанства и времени.

Анри Пуанкаре (уже в первой работе от 5 июня 1905 года), исходя из уравнений Максвелла-Лоренца, установил принцип относительности для электромагнитных явлений как строгую математическую истину. Он распространил также постулат относительности на все силы природы, в том числе гравитационные, открыл законы релятивистской механики.

Фундаментальный вклад А.Пуанкаре в разработку теории относительности и релятивистской механики можно увидеть, изучая его статьи. Этой же цели служат наши комментарии.

Эти две работы А.Пуанкаре исключительно современны как по содержанию, так и по форме изложения. Поистине, они являются жемчужинами теоретической физики.

В то же время следует подчеркнуть, что изучение этих работ, а вместе с тем и вклада А.Пуанкаре в создание специальной теории относительности требует самого серьезного, самого обстоятельного подхода.

Заметим, в частности, что В.Паули лишь в зрелом возрасте по достоинству оценил значение работ А.Пуанкаре "О динамике электрона".

Порой даже известные физики (например, Луи де Бройль), утверждают, что "Пуанкаре так и не сделал решающего шага", а потому он и не построил теорию относительности. Эти, мягко говоря, неправильные и наивные высказывания свидетельствуют либо о том, что их авторы поверхностно читали работу А.Пуанкаре "О динамике электрона", а потому и не поняли ее, либо о том, что они вообще не понимают теорию относительности.

Работа Пуанкаре – это изумительное по глубине и точности выражения великое творение величайшего естествоиспытателя. В ней имеется почти все основное, что составляет содержание теории относительности. В этом может убедиться каждый, кто имеет возможность внимательно изучить эту работу.

Иногда, говоря о творцах теории относительности, противопоставляют Пуанкаре-математика и Эйнштейна-физика. Так, В.Паули уже в зрелом возрасте писал, в частности, следующее: "Сегодня мы с достаточным основанием говорим "группа Лоренца"; однако исторически случилось так, что Лоренц не сумел распознать групповой характер своих преобразований. Их групповые свойства были установлены независимо Пуанкаре и Эйнштейном. К сожалению, из-за этого возникает спор о приоритете. В действительности же гораздо интереснее проследить за различием в подходе к проблеме математика Пуанкаре и физика Эйнштейна". Далее В.Паули отмечает: "В совпадении результатов, полученных независимо друг от друга Эйнштейном и Пуанкаре, я усматриваю глубокий смысл гармонии математического метода и анализа, опирающегося на всю совокупность данных физического опыта".

Настоящая работа представляет собой новое издание двух статей А.Пуанкаре "О динамике электрона", публикуемых для удобства читателей с использованием современных обозначений и сопровождаемых краткими комментариями, в составлении которых принял участие профессор В.А.Матвеев. Комментарии выделены и отмечены знаком.*

Академик
А.А.Логунов

Для тех читателей, кто решит ознакомиться с оригиналами статей Пуанкаре, приведем для удобства сравнение принятых в них и современных обозначений, используемых в настоящей редакции статей:

$(\alpha, \beta, \gamma) = \vec{H}$ – *магнитное поле;*

$(f, g, h) = \vec{E}$ – *электрическая индукция;*

$(F, G, H) = \vec{A}$ – *вектор-потенциал;*

$\psi = \varphi$ – *скалярный потенциал;*

$(\xi, \eta, \zeta) = \vec{v}$ – *скорость электрона;*

$\vec{j} = \rho\vec{v}$ – *плотность тока зарядов;*

ρ – *плотность заряда;*

$(u, v, w) = \vec{g} = \vec{j} + \dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}$ – *полная плотность тока, включая ток зарядов и ток смещения.*

Скорость света принята за единицу, т. е. $c = 1$.

COMPTES RENDUS

HEBDOMADAIRES

DES SÉANCES

DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES

PUBLIÉS,

CONFORMÉMENT A UNE DÉCISION DE L'ACADÉMIE

En date du 13 Juillet 1835,

PAR MM. LES SECRÉTAIRES PERPÉTUELS.

TOME CENT QUARANTIEME.

JANVIER — JUIN 1905.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DES COMPTES RENDUS DES SÉANCES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES

Quai des Grands-Augustins, 55.

1905

ACADÉMIE DES SCIENCES.

SÉANCE DU LUNDI 5 JUIN 1905,

PRÉSIDENCE DE M. TROOST

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS

DES MEMBRES ET DES CORRESPONDANTS DE L'ACADÉMIE.

ÉLECTRICITÉ. — *Sur la dynamique de l'électron.*
Note de M. **H. Poincaré.**

Il semble au premier abord que l'aberration de la lumière et les phénomènes optiques qui s'y rattachent vont nous fournir un moyen de déterminer le mouvement absolu de la Terre, ou plutôt son mouvement, non par rapport aux autres astres, mais par rapport à l'éther. Il n'en est rien; les expériences où l'on ne tient compte que de la première puissance de l'aberration ont d'abord échoué et l'on en a aisément découvert l'explication; mais Michelson, ayant imaginé une expérience où l'on pouvait mettre en évidence les termes dépendant du carré de l'aberration, ne fut pas plus heureux. Il semble que cette impossibilité de démontrer le mouvement absolu soit une loi générale de la nature.

Une explication a été proposée par Lorentz, qui a introduit l'hypothèse d'une contraction de tous les corps dans le sens du mouvement terrestre; cette contraction rendrait compte de l'expérience de Michelson et de toutes celles qui ont été réalisées jusqu'ici, mais elle laisserait la place à d'autres expériences plus délicates encore, et plus faciles à concevoir qu'à exécuter, qui seraient de nature à mettre en évidence le mouvement absolu de la Terre. Mais, si l'on regarde l'impossibilité d'une pareille constatation comme hautement probable, il est permis de prévoir que ces expériences, si on parvient jamais à les réaliser, donneront encore un résultat négatif. Lorentz a cherché à compléter et à modifier son hypothèse de façon à la mettre en concordance avec le postulat de l'impossibilité *complète* de la détermination du mouvement absolu. C'est ce qu'il a réussi à faire dans son article intitulé *Electromagnetic phenomena in a system moving with any velocity smaller than that of light* (*Proceedings* de l'Académie d'Amsterdam, 27 mai 1904).

L'importance de la question m'a déterminé à la reprendre; les résultats que j'ai obtenus sont d'accord sur tous les points importants avec ceux de Lorentz; j'ai été seulement conduit à les modifier et à les compléter dans quelques points de détail.

Le point essentiel, établi par Lorentz, c'est que les équations du champ électromagnétique ne sont pas altérées par une certaine transformation (que j'appellerai du nom de *Lorentz*) et qui est de la forme suivante

$$(1) \qquad x' = kl(x + \varepsilon t), \qquad y' = ly, \qquad z' = lz, \qquad t' = kl(t + \varepsilon x),$$

x, y, z sont les coordonnées et t le temps avant la transformation, x', y', z' et t' après la transformation. D'ailleurs ε est une constante qui définit la transformation

$$k = \frac{1}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}}$$

et l est une fonction quelconque de ε. On voit que dans cette transformation l'axe des x joue un rôle particulier, mais on peut évidemment construire une transformation où ce rôle serait joué par une droite quelconque passant par l'origine. L'ensemble de toutes ces transformations, joint à l'ensemble de toutes les rotations de l'espace, doit former un groupe; mais, pour qu'il en soit ainsi, il faut que $l = 1$; on est donc conduit à supposer $l = 1$ et c'est là une conséquence que Lorentz avait obtenue par une autre voie.

Soient ρ la densité électrique de l'électron, ξ, η, ζ sa vitesse avant la transformation; on aura pour les mêmes quantités ρ', ξ', η', ζ' après la transformation

$$(2) \qquad \rho' = \frac{k}{l^3}\rho(1 + \varepsilon\xi), \qquad \rho'\xi' = \frac{k}{l^3}\rho(\xi + \varepsilon), \qquad \rho'\eta' = \frac{\rho\eta}{l^3}, \qquad \rho'\zeta' = \frac{\rho\zeta}{l^3}.$$

А. Пуанкаре

О динамике электрона[1]

На первый взгляд кажется, что аберрация света и связанные с ней оптические и электрические явления дают нам средство для определения абсолютного движения Земли или, вернее, ее движения не по отношению к другим небесным телам, а по отношению к эфиру. На самом деле это не так. Опыты, где принимаются в расчет только члены первого порядка относительно величины аберрации, дали сначала отрицательный результат, чему вскоре было найдено объяснение; но и Майкельсон, придумавший опыт, в котором становились уже заметными члены, зависящие от квадрата аберрации, в свою очередь, потерпел неудачу. Невозможность обнаружить абсолютное движение Земли представляет, по-видимому, общий закон природы.

* "Опыт дал множество фактов, которые допускают следующее обобщение: невозможно обнаружить абсолютное движение материи, или, точнее, относительное движение весомой материи и эфира. Все, что можно сделать, – это выявить движение весомой материи относительно весомой материи".[2]

Эти слова, написанные Пуанкаре десятью годами ранее, весьма ясно показывают, что идея о существовании общего закона ненаблюдаемости абсолютного движения материи зрела у него давно.

---

[1] Опубликовано 5 июня 1905 г. в Докладах Французской академии наук. Comptes Rendus, 1905, v. 140, 1504–1508.

[2] А.Пуанкаре. К теории Лармора. – выдержка из статей: L'Eclairage Electrique, t. 5, p. 5 (5 octobre 1895). См. также: Принцип относительности. – Сб. работ по специальной теории относительности, М.: Атомиздат, 1973, с. 7.

Развивая свою мысль о "полной невозможности определения абсолютного движения" в связи с новой гипотезой Лоренца, в соответствии с которой все тела должны испытывать в направлении движения Земли уменьшение их длины на $\frac{1}{2} \cdot 10^{-9}$, Пуанкаре писал:

"Такое странное свойство кажется настоящим coup de pouce[3] самой природы, чтобы избежать обнаружения абсолютного движения Земли с помощью оптических явлений. Это не может меня удовлетворить, и я должен высказать здесь свое отношение: я считаю очень вероятным тот факт, что оптические явления зависят только от относительного движения присутствующих материальных тел, источников света или оптических приборов и *не с точностью до величин порядка квадрата или куба аберрации,* а строго. По мере того, как измерения станут точнее, этот принцип будет выверен с еще большей точностью.

Нужно ли будет новое coup de pouce, новая гипотеза для каждого приближения? Очевидно нет: хорошо сформулированная теория должна позволять доказывать принцип сразу со всей строгостью. Теория Лоренца пока этого не позволяет. Но из всех предложенных теорий именно она ближе всего к тому, чтобы это осуществить.[4]

В 1904 году в докладе на Конгрессе искусства и науки в Сент-Луисе Пуанкаре среди основных принципов теоретической физики формулирует принцип относительности, согласно которому, по его словам, "законы физических явлений должны быть одинаковыми для неподвижного наблюдателя и для наблюдателя, совершающего равномерное поступательное движение, так что мы не имеем и не можем иметь никакого способа определять, находимся ли мы в подобном движении или нет."[5]

Объяснение было предложено Лоренцом, который ввел гипотезу о сокращении всех тел в направлении движения Земли; это сокращение дало бы объяснение опыту Майкельсона и всем другим, произ-

---

[3] Ухищрение (*франц.*)

[4] Из курса лекций по теории электродинамики, прочитанного в Сорбонне в 1899 г. и изданного в 1901 г. (Electricite et Optique, Paris, G.Carre et c. Naud, 1901, p. 535–536) Перевод с франц. И.С.Зарубиной.

[5] А.Пуанкаре. Настоящее и будущее математической физики. Опубликовано в журналах: Bulletin des Sciences Mathematiques, December 1904, v. 28, ser. 2, p. 302: The Monist, January 7905, v. XY, N 1 (перевод с франц. Т.Д.Блохинцевой).

веденным до сих пор в этом направлении опытам. Однако оно оставляло бы место для других опытов, еще более тонких и более простых по замыслу, чем по исполнению, целью которых было бы обнаружение абсолютного движения Земли. Но, рассматривая невозможность подобного утверждения как очень вероятную, можно предвидеть, что эти опыты, если их когда-либо и удастся осуществить, снова дадут отрицательный результат. Лоренц старался дополнить и видоизменить гипотезу так, чтобы установить соответствие между нею и постулатом *полной* невозможности определения абсолютного движения. Ему удалось это сделать в своей статье "Электромагнитные явления в системе, движущейся с любой скоростью, меньшей скорости света" (Известия Амстердамской Академии, 27 мая 1904 г.)

Важность этого вопроса побудила меня снова заняться им; результаты, полученные мною, согласуются во всех наиболее важных пунктах с теми, которые получил Лоренц; я стремился только несколько видоизменить и дополнить их.

Идея Лоренца состоит в том, что уравнения электромагнитного поля не изменятся в результате некоторого преобразования (которое я назову именем Лоренца) следующего вида:

$$x' = \gamma l(x - \beta t), \;\; y' = ly, \;\; z' = lz, \;\; t' = \gamma l(t - \beta x)\,, \tag{1}$$

где x, y, z – координаты и t – время до преобразования, а x', y', z' и t' – после преобразования. Величина β – константа, которая определяет преобразование

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}\,,$$

а l – некоторая функция от β.

* Как сразу видно из формул (1), положению начала новых координат ($x' = y' = z' = 0$) отвечает условие $x = \beta t$. Другими словами, начало новых координат перемещается в системе отсчета x, y, z со скоростью β вдоль оси x.

Таким образом, преобразования Лоренца связывают переменные (x, y, z, t), относящиеся к одной из систем координат, с переменными (x', y', z', t'), относящими к другой системе, движущейся равномерно и прямолинейно со скоростью β вдоль оси x по отношению к первой.

Доказательство утверждения, что уравнения электромагнитного поля не изменяются при преобразованиях Лоренца, означает, что электромагнитные явления описываются в обеих системах одинаковыми уравнениями, и, следовательно, никакими электромагнитными процессами нельзя отличить систему отсчета (x, y, z, t) от системы отсчета (x', y', z', t'), равномерно и прямолинейно движущейся по отношению к первой.

Мы видим, что из инвариантности уравнений электромагнитного поля относительно преобразований группы Лоренца следует выполнимость принципа относительности для электромагнитных явлений. Иначе говоря, из уравнений Максвелла-Лоренца принцип относительности для электромагнитных явлений следует как строгая математическая истина.

В этом преобразовании ось x играет особую роль, но, очевидно, можно построить такое преобразование, в котором эту роль будет выполнять некоторая прямая, проходящая через начало координат. Все эти преобразования вместе со всеми пространственными вращениями должны образовывать группу; но для этого нужно, чтобы $l = 1$; следовательно, мы пришли к необходимости предположить, что $l = 1$, это и является следствием, которое Лоренц получил другим путем.

* Необходимо подчеркнуть, что, установив групповой характер совокупности всех чисто пространственных преобразований вместе с преобразованиями Лоренца, оставляющими инвариантными уравнения электродинамики, Пуанкаре тем самым открыл существование в физике принципиально нового типа симметрии, связанной с группой линейных пространственно-временных преобразований, которую он назвал группой Лоренца.

Дополненная преобразованиями трансляций пространственных координат и времени, группа Лоренца образует максимальную группу пространственно-временных преобразований, оставляющих инвариантными все уравнения движения частиц и физических полей и носит данное ей впоследствии Е.Вигнером название группы Пуанкаре.

Пусть ρ — плотность заряда электрона, v_x, v_y и v_z — составляющие скорости электрона до преобразования; тогда для тех же величин ρ', v'_x, v'_y, v'_z после преобразования мы имеем

$$\rho' = \gamma l^{-3} \rho(1 - \beta v_x), \rho' v'_x = \gamma l^{-3} \rho(v_x - \beta), \rho' v'_y = l^{-3} \rho v_y, \rho' v'_z = l^{-3} \rho v_z. \quad (2)$$

Эти формулы несколько отличаются от тех, которые были найдены Лоренцом.

Пусть теперь $\vec{f}$ и $\vec{f}'$ – три компоненты силы до и после преобразования (*сила отнесена к единице объема*); тогда

$$f'_x = \gamma l^{-5}(f_x - \beta \vec{f}\vec{v}),\ f'_y = l^{-5} f_y,\ f'_z = l^{-5} f_z. \tag{3}$$

Эти формулы также несколько отличаются от предложенных Лоренцом; дополнительный член в $\vec{f}\cdot\vec{v}$ напоминает результат, полученный в свое время Льенаром.

Если теперь обозначим через $\vec{F}$ и $\vec{F}'$ составляющие силы, отнесенной не к единице объема, а к единице массы электрона, то получим

$$F'_x = \gamma l^{-5}\,\frac{\rho}{\rho'}\,(F_x - \beta\vec{F}\cdot\vec{v}),\ F'_y = \frac{\rho}{\rho'}\,l^{-5} F_y;\ F'_z = \frac{\rho}{\rho'}\,l^{-5} F_z. \tag{4}$$

* Формулы (2), (3), (4) заключают в себе установленные впервые Пуанкаре релятивистские законы преобразования плотности заряда и скорости движения электрона, а также компонент сил, действующих на электрон, отнесенных как к единице заряда, так и единице объема. Заметим, что именно сила, отнесенная к единице объема, введенная Пуанкаре, соответствует трем пространственным компонентам четырехмерного вектора силы, появляющегося в правой части релятивистски инвариантных уравнений движения электрона.

Таким образом, Пуанкаре сделал в этой работе шаг вперед по сравнению с Лоренцем в направлении формулировки последовательной релятивистской динамики электрона.

Заслуживает внимания то обстоятельство, что, развивая в своих статьях о динамике электрона совершенно новые идеи, исправляя и дополняя Лоренца, Пуанкаре максимальным образом отдает дань Лоренцу как первооткрывателю, предоставляя другим судить о его личном вкладе в развитие идей теории относительности.

Свидетельства самого Лоренца исключительно важны в этом отношении, так как позволяют восполнить тот пробел, который порой допускается некоторыми авторами, пишущими об истории создания специальной теории относительности, и отдать должное Пуанкаре как одному из творцов релятивистской механики и специальной теории относительности.

Так, обсуждая полученные впервые Пуанкаре релятивистские формулы преобразования скоростей, плотностей заряда и тока электрона, Лоренц писал[6]: "Формулы (4) и (7) не содержатся в моей статье 1904 г., поскольку я не подумал о прямом пути, ведущем к ним, ибо полагал, что между системами x, y, z, t и x', y', z', t' имеется существенная разница. В одной использованы — таков был ход моих рассуждений — оси координат, имеющие определенное положение в эфире, и то, что можно было назвать "истинное" время; в другой системе, наоборот, мы имеем дело просто со вспомогательными величинами, введенными лишь с помощью математического ухищрения. В частности, переменную t' нельзя было бы назвать "временем" в том же смысле, как переменную t.

При таком ходе идей я не думал описывать явления в системе x', y', z', t' *точно таким же образом*, как в системе x, y, z, t..." И далее там же: "...я не смог достигнуть полной инвариантности уравнений; мои формулы оставались загроможденными лишними членами, которые должны были бы исчезнуть. Эти члены были слишком малы, чтобы оказать заметное влияние на явления, и этим я мог объяснить обнаруженную наблюдениями независимость их от движения Земли, но я не установил принципа относительности как строгую и универсальную истину.

Напротив, Пуанкаре получил полную инвариантность уравнений электродинамики и сформулировал "постулат относительности" — термин, впервые введенный им. В самом деле, исходя из точки зрения, которую я упустил, он вывел формулы (4) и (7). Добавим, что исправляя, таким образом, недостатки моей работы, он никогда в них меня не упрекнул".

Лоренц пришел также к необходимости предположить, что движущийся электрон принимает форму сжатого эллипсоида; эту же гипотезу выдвинул Ланжевен, но в то время как у Лоренца постоянными остаются две оси эллипсоида, что находится в согласии с его предположением $l = 1$, у Ланжевена, наоборот, объем эллипсоида остается постоянным. Оба автора показали, что эти две гипотезы так же хорошо согла-

---

[6] Уже цитируемая ранее работа Лоренца "Две статьи Анри Пуанкаре о математической физике"; см. Принцип относительности. – Сб. работ по специальной теории относительности, М.: Атомиздат, 1973, с. 189–1967.

Формулы (4) и (7), о которых пишет Лоренц, есть соответственно формулы преобразования скоростей электрона и плотности заряда.

суются с опытами Кауфмана, как и первоначальная гипотеза Абрагама (шаровой электрон). Преимущество гипотезы Ланжевена состоит в ее достаточности, т. е. достаточно рассматривать электрон как деформируемый и несжимаемый для объяснения того, что, находясь в движении, он принимает форму эллипсоида. Но я могу показать, не противореча Лоренцу, что она не может быть совместима с невозможностью опыта, обнаруживающего абсолютное движение. Как я уже сказал, это происходит от того, что $l = 1$ является единственной гипотезой, для которой преобразования Лоренца образуют группу.

Но и в гипотезе Лоренца согласие между формулами не происходит само по себе; его получают одновременно с возможным объяснением сжатия электрона в предположении, что *деформируемый и сжимаемый электрон подвержен постоянному внешнему давлению, работа которого пропорциональна изменению объема этого электрона.*

Применяя принцип наименьшего действия, я могу показать, что при этих условиях компенсация является полной, если предположить, что инерция имеет исключительно электромагнитное происхождение, как это общепризнано после опытов Кауфмана, и, за исключением постоянного давления, о котором я только что говорил и которое действует на электрон, все силы будут электромагнитного происхожения. Таким образом можно объяснить невозможность обнаружения абсолютного движения Земли и сокращения всех тел в направлении движения Земли.

Но это не все. Лоренц в цитированной работе считал необходимым дополнить свою гипотезу допущением, что все силы, какого бы происхождения они ни были, ведут себя при поступательном движении точно так же, как электромагнитные силы, и что вследствие этого влияние преобразования Лоренца на их составляющие определяется уравнениями (4).

* Здесь Пуанкаре, развивая высказанное Лоренцем допущение, распространяет принцип относительности на все силы, независимо от их происхождения, в частности, на силы тяготения.

Он впервые указывает, что постулат относительности требует такой модификации законов тяготения, при которой распространение сил тяготения происходит не мгновенно, а со скоростью света, и определяется запаздывающим обменом гравитационных волн.

Оказалось необходимым более внимательно рассмотреть эту гипотезу и, в частности, исследовать, какие изменения она вынуждает нас вносить в законы тяготения. Это то, что я старался определить;

сначала я пришел к необходимости предположить, что распространение сил тяготения происходит не мгновенно, а со скоростью света. Это, кажется, находится в противоречии с результатом, полученным Лапласом, который утверждает, что если это распространение и не является мгновенным, оно, по крайней мере, происходит быстрее, чем распространение света. Однако в действительности вопрос, который поставил перед собой Лаплас, значительно отличается от вопроса, которым мы здесь занимаемся. По Лапласу, введение конечной скорости распространения было *единственным* изменением, которое он внес в закон Ньютона. Здесь же подобное изменение сопровождается многими другими; следовательно, между ними возможна частичная компенсация и она, в самом деле, происходит.

Следовательно, когда мы будем говорить о положении или скорости притягивающего тела, мы будем иметь в виду положение или скорость в момент, когда *гравитационная волна* вышла из этого тела; когда мы будем говорить о положении или скорости притягиваемого тела, мы будем иметь в виду это положение или эту скорость в момент, когда данное притягиваемое тело настигается гравитационной волной, испускаемой другим телом; ясно, что первый момент предшествует второму.

Следовательно, если x, y, z являются проекциями на три оси вектора $\vec{r}$, который соединяет оба положения, если составляющие скорости притягиваемого тела есть $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$ а притягивающего тела — $\vec{v}_1 = (v_{1x}, v_{1y}, v_{1z})$, три составляющие притяжения (которые я могу также назвать $\vec{F}$) будут функциями $\vec{r}$, $\vec{v}$, $\vec{v}_1$. Спрашивается, можно ли определить эти функции таким образом, чтобы они вели себя при преобразовании Лоренца в соответствии с уравнениями (4) и чтобы обычный закон тяготения имел место во всех случаях, когда скорости $\vec{v}$, $\vec{v}_1$ достаточно малы, так что можно пренебречь их квадратами по сравнению с квадратом скорости света?

На этот вопрос следует ответить утвердительно. Найдено, что притяжение, учитывающее поправку, состоит из двух сил, одна из них параллельна составляющим вектора $\vec{r}$, другая — составляющим скорости $\vec{v}_1$.

Расхождение с общепринятым законом тяготения, как я только что отметил, порядка v^2, если же предположить только, как это сделал Лаплас, что скорость распространения равна скорости света, это расхождение было бы порядка v, т. е. в 10 000 раз большим. Следовательно, на первый взгляд не кажется абсурдным предположение, что астрономические наблюдения не являются достаточно точными, чтобы обнаружить такое малое расхождение, какое только мы можем себе представить. Этот вопрос может быть разрешен только в результате глубокого исследования.

* Таким образом, Пуанкаре вводит физическое понятие гравитационных волн, обмен которыми, аналогично обмену электромагнитными сигналами, порождает гравитационные силы, и дает оценку вклада релятивистских поправок к закону тяготения Ньютона.

В частности, он показывает, что члены первого порядка по v/c в точности сокращаются, и, таким образом, релятивистские поправки к ньютоновскому закону являются величинами порядка $(v/c)^2$.

Эти результаты снимают замеченную еще Лапласом трудность, связанную с предположением о конечной скорости распространения сил гравитационного притяжения, и позволяют прийти к заключению о том, что гипотеза о равенстве скоростей света и гравитационного притяжения не противоречит наблюдательным данным.

RENDICONTI

DEL

CIRCOLO MATEMATICO

DI PALERMO

Direttore: G. B. GUCCIA.

TOMO XXI.

PALERMO,
SEDE DELLA SOCIETÀ
30, VIA RUGGIERO SETTIMO, 30.

1906

А. Пуанкаре

О динамике электрона[1]

Введение

На первый взгляд кажется, что аберрация света и связанные с нею оптические и электрические явления дают нам средство для определения абсолютного движения Земли или, вернее, ее движения не по отношению к другим небесным телам, а по отношению к эфиру. Уже Френель пытался сделать это, но скоро обнаружил, что движение Земли не изменяет законов отражения и преломления. Аналогичные опыты, как, например, с трубой, наполненной водою, и все прочие, где принимаются в расчет только члены первого порядка относительно величины аберрации, дали отрицательный результат, чему вскоре было найдено объяснение; но и Майкельсон, придумавший опыт, в котором становились уже заметными члены, зависящие от квадрата аберрации, в свою очередь, потерпел неудачу.

Эта невозможность показать опытным путем абсолютное движение Земли представляет, по-видимому, общий закон природы; мы естественно приходим к тому, чтобы принять этот закон, который мы назовем *постулатом относительности*, и принять без оговорок. Все равно, будет ли позднее этот постулат, до сих пор согласующийся с опытом, подтвержен или опровергнут более точными измерениями, сейчас во всяком случае предствляется интересным посмотреть, какие следствия могут быть из него выведены.

* Заметим, что *постулат относительности* или постулат полной невозможности определения абсолютного движения, как он формулирует его в своей первой краткой заметке "О динамике

---

[1] Rendiconti del Cirocolo matematico di Palermo, 1906, 21, 129—176. Русский перевод см.: Г.А.Лоренц, А.Пуанкаре, А.Эйнштейн, Г.Минковский. Принцип относительности. — Сборник. М.: ОНТИ, 1935, с.51—129.

электрона", впервые упоминается Пуанкаре в опубликованном в 1904 году докладе на Конгрессе искусства и науки в Сент-Луисе.[2]

В этом докладе, перечисляя основные принципы теоретической физики, Пуанкаре формулирует "принцип относительности, согласно которому законы физических явлений должны быть одинаковыми для неподвижного наблюдателя и для наблюдателя, совершающего равномерное поступательное движение, так что мы не имеем и не можем иметь никакого способа определять, находимся ли мы в подобном движении или нет."

Лоренц и Фицджеральд ввели гипотезу о сокращении всех тел в направлении движения Земли, зависящем от квадрата аберрации. Это сокращение, которое мы назовем *лоренцовым сокращением*, дало бы объяснение опыту Майкельсона и всем другим, произведенным до сих пор в этом направлении опытам. Однако, если бы мы пожелали принять постулат относительности во всей его общности, подобная гипотеза оказалась бы недостаточной.

Это заставило Лоренца дополнить и видоизменить гипотезу так, чтобы установить полное соответствие между нею и постулатом относительности.

Он достиг этого в своей статье "Электромагнитные явления в системе, движущейся с любой скоростью, меньшей скорости света" (Amsterdam Proceedings, 1904)[3].

Важность вопроса побудила меня снова заняться им; результаты, полученные мною, согласуются во всех наиболее важных пунктах с тем, которые получил Лоренц; я стремился только дополнить и видоизменить их в некоторых деталях; некоторые имеющиеся расхождения, как мы увидим дальше, не играют существенной роли.

Идею Лоренца можно резюмировать так: если возможно сообщить общее поступательное движение всей системе без того, чтобы имели место какие-либо видимые изменения в явлениях, то это значит, что уравнения электромагнитного поля не изменятся в результате некоторых преобразований, которые мы будем называть *преобразованиями*

---

[2] А.Пуанкаре. Настоящее и будущее математической физики. Опубликовано в журналах: Bulletin des Sciences Mathematiques, December 1904, v. 28, ser. 2, p. 302/ The Monist, January, v. XY, N 1. См. также: Принцип относительности. – Сб. работ по специальной теории относительности. М.: Атомиздат, 1973 г. с. 27–44.

[3] Русский перевод см.: Г.А.Лоренц, А.Пуанкаре, А.Эйнштейн, Г.Минковский. Принцип относительности. – Сборник. М.: ОНТИ, 1935, с. 16–48.

Лоренца; две системы, одна неподвижная, другая перемещающаяся поступательно, представляют, таким образом, точное изображение одна другой.

*Последние слова показывают, насколько глубоко Пуанкаре понимал и ясно формулировал содержащуюся в преобразованиях группы Лоренца равнозначность всех движущихся прямолинейно и равномерно друг относительно друга различных систем отсчета, которая приводит к полной невозможности определения абсолютного движения.

Отметим здесь принципиальное отличие от точки зрения Лоренца по вопросу о взаимоотношении двух систем отсчета, связанных релятивистскими преобразованиями. Лоренц, по его собственным словам, "полагал, что между системами x, y, z, t и x', y', z', t' имеется существенная разница. В одной использованы — таков был ход моих рассуждений — оси координат, имеющие определенное положение в эфире, и то, что можно было назвать "истинное" время; в другой системе, наоборот, мы имеем дело просто со вспомогательными величинами, введенными лишь с помощью математического ухищрения. В частности, переменную t' нельзя было бы назвать "временем" в том же смысле, как переменную t.

При таком ходе идей я не думал описывать явления в системе x', y', z', t' *точно таким же образом*, как в системе x, y, z, t, ..."[4]

Далее там же он Лоренц пишет "Формулы преобразования я стремился выбрать так, чтобы получить в новой системе наиболее простые уравнения. Позже я увидел из статьи Пуанкаре, что, действуя более систематически, я мог бы достигнуть еще большего упрощения. Не заметив этого, я не смог достигнуть полной инвариантности уравнений; мои формулы оставались загроможденными лишними членами, которые должны были бы исчезнуть. Эти члены были слишком малы, чтобы оказать заметное влияние на явления, и этим я мог объяснить обнаруженную наблюдениями независимость их от движения Земли, но я не установил принципа относительности как строгую и универсальную истину.

---

[4] Г.А.Лоренц. Две статьи Анри Пуанкаре о математической физике. См.: Принцип относительности. – Сб. работ по специальной теории относительности. М.: Атомиздат, 1973, с. 189–201.

Напротив, Пуанкаре получил полную инвариантность уравнений электродинамики и сформулировал "постулат относительности" — термин, впервые введенный им."

Ланжевен[5] пытался видоизменить идею Лоренца; у обоих авторов движущийся электрон принимает форму сжатого эллипсоида, но в то время как у Лоренца постоянными остаются две оси эллипсоида, у Ланжевена, наоборот, объем эллипсоида остается постоянным. Оба ученых, впрочем, показали, что эти две гипотезы так же хорошо согласуются с опытами Кауфмана, как и первоначальная гипотеза Абрагама (недеформирующийся шаровой электрон).

Преимущество теории Ланжевена в том, что она вводит только электромагнитные силы и силы связи, но она несовместима с постулатом относительности. Последнее было показано Лоренцом; я также нашел этот результат несколько иным путем, пользуясь основными положениями теории групп.

Следует поэтому вернуться к теории Лоренца; однако, если мы хотим сохранить ее, избегнув явных противоречий, необходимо допустить существование силы. Я пытался определить эту силу и нашел, что *она может быть приравнена постоянному внешнему давлению, действующему на деформируемый и сжимаемый электрон, работа которого пропорциональна изменению объема этого электрона.*

Тогда, если инерция материи имеет исключительно электромагнитное происхождение, как это общепризнано после опытов Кауфмана, и, за исключением постоянного давления, о котором я только что говорил, все силы будут электромагнитного происхождения, то постулат относительности может быть установлен со всей строгостью; именно это я и собираюсь показать весьма простыми вычислениями, основанными на принципе наименьшего действия.

Но это не все. Лоренц в цитированной работе считал необходимым дополнить свою гипотезу так, чтобы постулат относительности имел место и при наличии других сил, помимо электромагнитных. Согласно его идее, все силы, какого бы они ни были происхождения, ведут себя благодаря преобразованию Лоренца (и, следовательно, благодаря поступательному перемещению) точно так же, как электромагнитные силы.

---

[5] До Ланжевена эту же идею высказал Бухерер в Бонне (см.: **Bucherer** Mathematische Einfuhrung in die Elektronentheorie. Teubner, Leipzig, 1904).

* Формулируя постулат относительности или, как он называет его в своей первой работе, постулат полной невозможности определения абсолютного движения, Пуанкаре подчеркивает его универсальность в применении ко всем силам природы. Необходимо заметить, что хотя и здесь Пуанкаре со свойственной ему скромностью отдает первенство Лоренцу, именно ему (Пуанкаре), впервые установившему групповой характер преобразований Лоренца, а также правильные законы преобразования сил и других физических величин мы в значительной степени обязаны открытию всеобщего характера релятивистских законов независимо от природы сил.

Оказалось необходимым более внимательно рассмотреть эту гипотезу и, в частности, исследовать, какие изменения она вносит в законы тяготения.

Прежде всего, очевидно, она вынуждает нас предположить, что распространение сил тяготения происходит не мгновенно, но со скоростью света. Можно было бы подумать, что это является достаточным основанием для того, чтобы отвергнуть подобную гипотезу, так как Лаплас показал, что она не может иметь места. Но на самом деле действие этого распространения уравновешивается в большей части другим обстоятельством, так что не существует противоречия между предложенным законом и астрономическими наблюдениями.

Возможно ли найти такой закон, который удовлетворял бы условию, поставленному Лоренцом, и одновременно сводился к закону Ньютона во всех случаях, когда скорости небесных тел достаточно малы для того, чтобы можно было пренебречь их квадратами (а также произведениями ускорений на расстояния) по сравнению с квадратом скорости света?

На этот вопрос, как мы увидим дальше, следует ответить утвердительно.

Согласуется ли видоизмененный таким образом закон с астрономическими наблюдениями?

По-видимому, да, но этот вопрос может быть окончательно разрешен только после более глубокого исследования.

Но, допуская даже, что это обсуждение докажет преимущество новой гипотезы, к какому заключению мы должны будем прийти? Если распространение сил притяжения происходит со скоростью света, то это не может быть результатом каких-либо случайных обстоятельств, а должно быть обусловлено одной из функций эфира; тогда возникает задача глубже проникнуть в природу этой функции и связать ее с другими свойствами эфира.

* Интересно отметить, что хотя выдвинутый Пуанкаре постулат относительности предполагает полную невозможность определения движения материи относительно эфира, само понятие эфира им не отбрасывается.

Совершенно ясно, что теория относительности "уничтожила" не сам по себе эфир, а лишь приписываемое ему свойство абсолютной неподвижности.

Впоследствии это признавал Эйнштейн, который писал: "...ближайшее рассмотрение показывает, что специальная теория относительности не требует безусловного отрицания эфира. Можно принять существование эфира, не следует только заботиться о том, чтобы приписывать ему определенное состояние движения, иначе говоря, абстрагируясь, нужно отнять у него последний механический признак, который ему еще оставил Лоренц. Позднее мы увидим, что общая теория относительности оправдывает такое представление..."[6]

В современной теоретической физике понятие эфира уступило понятию физического вакуума – основного состояния, в котором неизбежно присутствуют квантовые флуктуации – нулевые колебания квантованных полей.

Недостаточно ограничиться простым сопоставлением формул, согласующихся между собою лишь благодаря счастливой случайности; необходимо, чтобы эти формулы, так сказать, проникали друг в друга. Разум наш не будет удовлетворен до тех пор, пока мы не поверим, что усмотрели причину этого согласования так хорошо, что, как нам кажется, мы могли бы ее предвидеть.

Однако этот вопрос можно представить себе еще с другой точки зрения; лучше всего можно это понять при помощи сравнения. Представим себе астронома, живущего до Коперника и размышляющего над системой Птолемея; он заметил бы, что для всех планет один из двух кругов, эпицикл или деферент – основной круг, проходится в одно и то же время. Так как это не может быть случайностью, то, следовательно, между всеми планетами существует какая-то таинственная связь.

---

[6] А.Эйнштейн. Сборник научных трудов, т. 1, М.: Наука, 1965 г. с. 685–686.

Однако Коперник, изменив лишь оси координат, рассматриваемые ранее как неподвижные, сразу уничтожил эту видимую связь; каждая планета описывает только один круг, и периоды обращения,становятся независимыми друг от друга (до тех пор, пока Кеплер не установил между ними связь, которую считали уничтоженной).

Возможно, что и в нашем случае имеется нечто аналогичное; если бы мы приняли принцип относительности, то в законе тяготения и в электромагнитных законах нашли бы общую постоянную – скорость света. Точно так же мы встретили бы ее во всех других силах какого угодно происхождения, что можно объяснить только с двух точек зрения: или все, что существует в мире – электромагнитного происхождения, или же это свойтсво, являющееся, так сказать, общим для всех физических явлений, есть не что иное, как внешняя видимость, что-то связанное с методами наших измерений. Как же мы производим наши измерения? Прежде мы ответили бы: перенося тела, рассматриваемые как твердые и неизменные, одно на место другого; но в современной теории, принимая во внимание сокращение Лоренца, это уже неверно. Согласно этой теории, двумя равными отрезками, по определению, будут такие два отрезка, которые свет проходит в одно и то же время.

Может быть, достаточно только отказаться от этого определения,. чтобы вся теория Лоренца была совершенно уничтожена, как это случалось с системой Птолемея после вмешательства Коперника? Во всяком случае, если последнее и произойдет, это еще не докажет, что усилия Лоренца были бесполезными, ибо и Птолемей, какого мнения о нем ни придерживаться, отнюдь не был бесполезен для Коперника.

Поэтому я также нисколько не колебался опубликовать эти частичные результаты, хотя в настоящий момент вся теория кажется поставленной под угрозу, ввиду открытия магнитно-катодных лучей.

§ 1. Преобразование Лоренца

Лоренц ввел особую систему единиц, в которой множитель 4π исчезает во всех формулах. Я поступлю точно так же и, кроме того, выберу единицы длины и времени таким образом, чтобы скорость света была равна единице. Обозначая через $\vec{E} = (E_x, E_y, E_z)$ составляющие электрического смещения, через $\vec{H} = (H_x, H_y, H_z)$ – напряженности магнитного поля, $\vec{A} = (A_x, A_y, A_z)$ – компоненты векторного потенциала, через φ и ρ – скалярный потенциал и плотность электричества, наконец, через $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$ – составляющие плотности тока, мы можем представить основные формулы в виде:

$$\vec{g} = \frac{\partial}{\partial t}\vec{E} + \rho\vec{v} = \operatorname{rot}\vec{H},$$

$$\vec{H} = \operatorname{rot}\vec{A}, \quad \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\vec{A} - \vec{\nabla}\varphi,$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\vec{H} = -\operatorname{rot}\vec{E}, \quad \frac{\partial}{\partial t}\rho + \operatorname{div}(\rho\vec{v}) = 0, \tag{1}$$

$$\operatorname{div}\vec{E} = \rho, \quad \frac{\partial}{\partial t}\varphi + \operatorname{div}\vec{A} = 0,$$

$$\Box\varphi = -\rho, \quad \Box\vec{A} = -\rho\vec{v},$$

$$\Box = \vec{\nabla}^2 - \frac{\partial^2}{\partial t^2}.$$

Элемент объема материи $d\tau = dx\,dy\,dz$ подвергается действию механической силы, составляющие которой $f_x d\tau$, $f_y d\tau$, $f_z d\tau$ выводятся из формулы

$$\vec{f} = \rho\vec{E} + \rho[\vec{v} \times \vec{H}]. \tag{2}$$

Эти уравнения можно подвергнуть замечательному преобразованию, найденному Лоренцом, значение которого заключается в объяснении того, почему никакой опыт не в состоянии обнаружить абсолютное движение Земли.

Положим

$$x' = \gamma l(x - \beta t), \quad t' = \gamma l(t - \beta x), \tag{3}$$

$$y' = ly, \quad z' = lz,$$

где l и β – две призвольные постоянные, и пусть

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

Тогда, если мы обозначим через

$$\Box' = \vec{\nabla}'^2 - \partial^2/\partial t'^2,$$

то получим

$$\Box' = \Box\, l^{-2}.$$

Рассмотрим сферу, увлекаемую электроном при его равномерном поступательном движении; тогда

$$(\vec{r} - \vec{v}\,t)^2 = r^2$$

есть уравнение этой движущейся сферы, объем которой равен $4/3\,\pi r^3$.

В результате преобразования вместо сферы получится эллипсоид, уравнение которого нетрудно найти.

В самом деле, из уравнения (3) легко получаем

$$x = \gamma\, l^{-1}(x' + \beta t'),\quad t = \gamma l^{-1}(t' + \beta x')$$
$$y = l^{-1} y',\quad z = l^{-1} z'. \tag{3'}$$

Тогда уравнение эллипсоида запишется в виде

$$\gamma^2[x'(1 - \beta v_x) - t'(v_x - \beta)]^2 + [y' - \gamma v_y(t' + \beta x')]^2 +$$
$$+ [z' - \gamma v_z(t' + \beta x')]^2 = l^2 r^2,$$

Этот эллипсоид перемещается, участвуя в равномерном движении; для $t' = 0$ его уравнение имеет вид

$$\gamma^2 x'^2 (1 - \beta v_x)^2 + (y' - \gamma v_y \beta x')^2 + (z' - \gamma v_z \beta x')^2 = l^2 r^2,$$

и объем его будет равен

$$\frac{4}{3}\pi r^3 \frac{l^3}{\gamma(1 - \beta v_x)}.$$

Если мы желаем, чтобы заряд электрона не изменялся от преобразования, то, обозначая через ρ' новую плотность электричества, будем иметь

$$\rho' = \gamma l^{-3} \rho (1 - \beta v_x). \tag{4}$$

Новые скорости v'_x, v'_y, v'_z выражаются теперь через старые следующим образом:

$$v'_x = \frac{dx'}{dt'} = \frac{d(x - \beta t)}{d(t - \beta x)} = \frac{v_x - \beta}{1 - \beta v_x},$$

$$v'_y = \frac{dy'}{dt'} = \gamma^{-1} \frac{dy}{d(t - \beta x)} = \gamma^{-1} \frac{v_y}{1 - \beta v_x}, \quad v'_z = \gamma^{-1} \frac{v_z}{1 - \beta v_x}$$

откуда

$$\rho' v'_x = \gamma l^{-3} \rho (v_x - \beta), \quad \rho' v'_y = l^{-3} \rho v_y; \quad \rho' v'_z = l^{-3} \rho v_z. \tag{4'}$$

Здесь я должен отметить первое расхождение с Лоренцом. Лоренц полагает (с некоторой разницей в обозначениях) [см. цитированную выше работу, стр. 813, формулы (7) и (8)][7]:

$$\rho' = \gamma^{-1} l^{-3} \rho, \quad v'_x = \gamma^2 (v_x - \beta); \quad v'_y = \gamma v_y, \quad v'_z = \gamma v_z.$$

Таким способом также получаются формулы

$$\rho' v'_x = \gamma l^{-3} \rho (v_x - \beta), \quad \rho' v'_y = l^{-3} \rho v_y, \quad \rho' v'_z = l^{-3} \rho v_z,$$

где, однако, значение ρ' уже другое.

* Сам Г.Лоренц в опубликованной в 1914 году статье, посвященной памяти А.Пуанкаре и его вкладу в теоретическую физику, писал следующее:

"Формулы (4) и (7) не содержатся в моей статье 1904 г., поскольку я не подумал о прямом пути, ведущем к ним, ибо полагал, что между системами x, y, z, t и x', y', z', t' имеется существенная разница. В одной использованы — таков был ход моих рассуждений — оси координат, имеющие определенное положение в эфире, и то, что можно было назвать "истинное" время; в другой системе наоборот, мы имеем дело просто со вспомогательными величинами, введенными лишь с помощью математического ухищрения. В частности, переменную t' нельзя было назвать "временем" в том же смысле, как переменную t.

[7] Русский перевод см.: Г.А.Лоренц, А.Пуанкаре, А.Эйнштейн, Г.Минковский. Принцип относительности. Сборник. М.: ОНТИ, 1935, с. 21.

При таком ходе идей я не думал описывать явления в системе x', y', z', t' *точно таким же образом*, как в системе x, y, z, t, и я не определил уравнениями (4) и (7) величины ξ', η', ζ', ρ', соответствующие ξ, η, ζ, ρ. Вероятнее всего, свои формулы преобразования я нашел интуитивно, с помощью нынешних обозначений их можно выразить в виде:

$$\xi' = k^2(\xi + \epsilon), \ \eta' = k\eta, \ \zeta' = k\zeta, \ \rho' = \frac{1}{kl^3}\rho.$$

Формулы преобразования я стремился выбрать так, чтобы получить в новой системе наиболее простые уравнения. Позже я увидел из статьи Пуанкаре, что действуя более систематически, я мог бы достигнуть еще большего упрощения. Не заметив этого, я не смог достигнуть полной инвариантности уравнений; мои формулы оставались загроможденными лишними членами, которые должны были бы исчезнуть. Эти члены были слишком малы, чтобы оказать заметное влияние на явления, и этим я мог объяснить обнаруженную наблюдениями независимость их от движения Земли, но я не установил принципа относительности как строгую и универсальную истину.

Напротив, Пуанкаре получил полную инвариатность уравнений электродинамики и сформулировал "постулат относительности" – термин, впервые введенный им. В самом деле, исходя из точки зрения, которую я упустил, он вывел формулы (4) и (7). Добавим, что исправляя таким образом недостатки моей работы, он никогда в них меня не упрекнул".

Важно отметить, что величины (4) и (4') удовлетворяют условию непрерывности

$$\partial\rho'/\partial t' + \vec{\nabla}'\cdot(\rho'\vec{v}') = 0.$$

В самом деле, пусть λ – некоторый неопределенный коэффициент и D – функциональный определитель выражений

$$t + \lambda\rho, \ x + \lambda\rho v_x, \ y + \lambda\rho v_y, \ z + \lambda\rho v_z \tag{5}$$

относительно t, x, y, z.

Имеем

$$D = D_0 + D_1\lambda + D_2\lambda^2 + D_3\lambda^3 + D_4\lambda^4,$$

где

$$D_0 = 1, \; D_1 = \partial\rho/\partial t + \vec{\nabla}\cdot(\rho\vec{v}) = 0.$$

Полагая $\lambda' = l^4\lambda$, мы видим, что четыре функции

$$t' + \lambda'\rho', \; x' + \lambda'\rho' v_x', \; y' + \lambda'\rho' v_y', \; z' + \lambda'\rho' v_x' \qquad (5')$$

связаны с функциями (5) линейными соотношениями такого же вида, какие связывают новые переменные с прежними. Если же обозначить через D' функциональный определитель функций (5′) относительно новых переменных, то

$$D' = D, \; D' = D_0' + D_1'\lambda' + \dots + D_4'\lambda'^4,$$

откуда

$$D_0' = D_0 = 1, \; D_1' = l^{-4}D_1 = 0 = \partial\rho'/\partial t' + \vec{\nabla}'\cdot(\rho'\vec{v}'),$$

что и требовалось доказать.

Это условие не было бы выполнено при гипотезе Лоренца, так как ρ' имеет здесь другое значение.

Определим новые потенциалы – векторный и скалярный – так, чтобы удовлетворить уравнениям

$$\Box'\varphi' = -\rho', \; \Box'\vec{A}' = -\rho'\vec{v}'.$$

Мы получим затем отсюда

$$\varphi' = \gamma l^{-1}(\varphi - \beta A_x), \; A_x' = \gamma l^{-1}(A_x - \beta\varphi) \qquad (6)$$

$$A_y' = l^{-1}A_y, \; A_z' = l^{-1}A_z. \qquad (7)$$

Эти формулы значительно отличаются от соответствующих формул Лоренца, но расхождение происходит здесь, в конце концов, только от различных определений.

Выберем новые поля – электрическое и магнитное – так, чтобы удовлетворялись уравнения

$$\vec{E}' = -\frac{\partial}{\partial t'}\vec{A}' - \vec{\nabla}'\varphi', \quad \vec{H}' = [\vec{\nabla}' \times \vec{A}']. \tag{8}$$

Легко видеть, что

$$\begin{gathered} E'_x = l^{-2}E_x, \quad E'_y = \gamma l^{-2}(E_y - \beta H_z), \\ E'_z = \gamma l^{-2}(E_z + \beta H_y), \\ H'_x = l^{-2}H_x, \quad H'_y = \gamma l^{-2}(H_y + \beta E_z), \\ H'_z = \gamma l^{-2}(H_z - \beta E_y). \end{gathered} \tag{9}$$

Эти формулы тождественны с формулами Лоренца.

Наше преобразование не изменяет уравнений (1). В самом деле, условие непрерывности, а также уравнения (6) и (8) уже дают нам некоторые из уравнений (1) (за исключением штрихов у букв).

Уравнения (6), будучи подставлены в условие непрерывности, дают

$$\partial\varphi'/\partial t' + \vec{\nabla}' \cdot \vec{A}' = 0. \tag{10}$$

Остается установить, что

$$\frac{\partial}{\partial t'}\vec{E}' + \rho'\vec{v}' = \left[\vec{\nabla}' \times \vec{H}'\right], \quad \frac{\partial}{\partial t'}\vec{H}' = -\left[\vec{\nabla}' \times \vec{E}'\right],$$

$$\vec{\nabla}' \cdot \vec{E}' = \rho';$$

но легко видеть, что это есть не что иное, как следствие уравнений (6), (8) и (10).

Мы должны теперь сравнить силы до и после преобразования. Пусть $\vec{f}$ будет сила до преобразования, а $\vec{f}'$ – после него, причем обе отнесены к единице объема. Для того чтобы силы со штрихом удовлетворяли таким же уравнениям, как и до преобразования, необходимо, чтобы

$$\vec{f}' = \rho'\vec{E}' + \rho'[\vec{v}' \times \vec{H}'].$$

Заменяя все величины их значениями (4), (4′), (9) и принимая во внимание уравнения (2), получим

$$f_x' = \gamma l^{-5}(f_x - \beta\vec{f}\cdot\vec{v}),$$
$$f_y' = l^{-5} f_y, \quad f_z' = l^{-5} f_z. \tag{11}$$

Если мы обозначим через $\vec{F}$ составляющие силы, отнесенной уже не к единице объема, но к единице заряда электрона, а через $\vec{F}'$ – те же величины после преобразования, то будем иметь

$$\vec{f} = \rho\vec{F}, \quad \vec{f}\,' = \rho'\vec{F}',$$

и, следовательно, получим уравнения

$$F_x' = \gamma l^{-5}\frac{\rho}{\rho'}(F_x - \beta\vec{F}\cdot\vec{v}),$$
$$F_y' = l^{-5}\frac{\rho}{\rho'}F_y, \quad F_z' = l^{-5}\frac{\rho}{\rho'}F_z. \tag{11'}$$

Лоренц же нашел, с точностью до обозначений [см. цит. выше работу, стр. 813, формулу (10)][8]:

$$F_x = l^2 F_x' + l^2\beta(v_y'E_y' + v_z'E_z'),$$
$$F_y = \gamma^{-1}l^2 F_y' - \gamma^{-1}l^2\beta v_x'E_y', \tag{11''}$$
$$F_z = \gamma^{-1}l^2 F_z' - \gamma^{-1}l^2\beta v_x'E_z'.$$

Прежде, чем идти дальше, важно отыскать причину этого существенного расхождения. Оно, очевидно, происходит от того, что формулы для v_x', v_y', v_z' несколько отличаются от соответствующих формул Лоренца, тогда как формулы для электрического и магнитного поля – одни и те же.

---

[8] См.: Г.А.Лоренц, А.Пуанкаре, А.Эйнштейн, Г.Минковский. Принцип относительности. Сборник. М.: ОНТИ, 1935, с. 20.

Паули в опубликованной в 1921 г. статье, подготовленной для математической энциклопедии [9] и посвященной "рассмотрению трех работ Лоренца, Пуанкаре и Эйнштейна, в которых были установлены положения и развиты соображения, образующие фундамент теории относительности", писал следующее: "В работе Пуанкаре были заполнены формальные пробелы, оставшиеся у Лоренца. Принцип относительности был им высказан в качестве всеобщего и строгого положения. Поскольку Пуанкаре, как и остальные упомянутые авторы, принимает, что уравнения Максвелла для пустоты справедливы, то отсюда вытекает требование инвариантности всех законов природы относительно преобразований Лоренца[10]. Неизменность перпендикулярных к направлению движения размеров тела совершенно естественно вытекает из того требования, чтобы преобразования, с помощью которых осуществляется переход от неподвижной к движущейся системе, образовали группу, содержащую в качестве подгруппы обычные вращения осей координат. Далее, Пуанкаре исправил Лоренцевы формулы преобразования плотности заряда и скорости и, таким образом, достиг полной инвариантности уравнений электронной теории".

Подчеркнем, что именно Пуанкаре первым показал, что для всеобщей инвариантности законов природы относительно преобразований Лоренца необходимо, чтобы физические поля, силы и другие динамические и кинематические характеристики образовывали бы совокупности величин, преобразующихся при преобразованиях Лоренца по тому или иному тензорному закону или, иначе говоря, по одному из представлений группы Лоренца. Так он пришел, в частности, к тому, что векторный и скалярный потенциалы $(\vec{A}, \varphi)$, с одной стороны и плотность тока и плотность электрического заряда $(\vec{j}, \rho)$ – с другой, образуют совокупности величин, преобразующиеся по тому же линейному закону, что и совокупность трех пространственных координат и времени $(\vec{x}, t)$, то есть величин, которым, как мы бы сейчас сказали, после Минковского, соответствуют четырехмерные векторы или тензоры первого ранга.

---

[9] "Relativitätstheorie", Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften, b. V_2, Heft IY, Art. 19 (1921), издано в виде книги: В.Паули, Теория относительности, М.–Л.: ОГИЗ – Гостехиздат, 1947.

[10] Названия *преобразования Лоренца* и *группа Лоренца* впервые фигурируют именно в этой работе Пуанкаре.

Естественно, что отсюда также следуют законы преобразования компонент напряженностей электрического и магнитного полей ($\vec{E}$, $\vec{H}$).

Дальнейшее развитие этих идей было дано Минковским, показавшим, что компоненты электрического и магнитного полей образуют "шестивектор" или антисимметричный тензор второго ранга.

Если инерция электронов исключительно электромагнитного происхождения и если, кроме того, они подвержены действию только электромагнитных сил, то условие равновесия требует, чтобы внутри электрона имело место соотношение

$$\vec{f} = 0.$$

В силу же уравнений (11) это соотношение эквивалентно условию

$$\vec{f}\,' = 0.$$

Следовательно, условия равновесия электронов от преобразования не меняются.

* Подчеркнем, что Пуанкаре предельно ясно понимал, что именно сила Лоренца, отнесенная к единице объема, является величиной, сохраняющей свой вид при переходе от одной инерциальной системы к другой.

Таким образом, Пуанкаре был первым, кто установил правильные законы преобразования компонент сил, действующих на заряд со стороны электромагнитного поля, при преобразованиях Лоренца. Это позволило ему установить релятивистскую инвариантность условия устойчивости электрона при введении дополнительных сил, потенциал которых пропорционален объему протяженного заряда.

К сожалению, столь простая гипотеза неприемлема. В самом деле, если мы предположим, что $\vec{v} = 0$, то в силу условий $\vec{f} = 0$ получим

$$\vec{E} = 0$$

и, следовательно,

$$\operatorname{div}\vec{E} = 0, \text{ т. е. } \rho = 0$$

К аналогичным результатам приходим и в наиболее общем случае. Таким образом, кроме электромагнитных сил, необходимо допустить еще другие силы, например силы связи. Затем следует искать условия, которым должны удовлетворять эти силы или связи для того, чтобы равновесие электронов от преобразования не нарушалось. Это составит предмет одного из следующих параграфов.

§ 2. Принцип наименьшего действия

Известно, каким образом Лоренц получил свои уравнения, пользуясь принципом наименьшего действия. Однако я снова возвращаюсь к этому вопросу. хотя и не могу прибавить здесь ничего существенного к исследованию Лоренца; я предпочитаю представить его в несколько ином виде, более удобном для моей цели.

Я полагаю

$$J = \int dt\, d\tau \left(\frac{\vec{E}^2 + \vec{H}^2}{2} - \vec{g} \cdot \vec{A} \right), \tag{1}$$

где $\vec{E}$, $\vec{H}$, $\vec{A}$, $\vec{g}$ и т. д. подчиняются условиям

$$\operatorname{div} \vec{E} = \rho, \quad \vec{H} = \operatorname{rot} \vec{A}, \quad \vec{g} = \frac{\partial}{\partial t} \vec{E} + \rho \vec{v} \tag{2}$$

* Введенная Пуанкаре функция Лагранжа электромагнитного поля, взаимодействующего с системой точечных зарядов, отличается от принятого в настоящее время релятивистски инвариантного выражения

$$L = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2 - j_\mu A_\mu$$

лишь знаком, а также членами, представляющими собою частные производные по времени и пространственным координатам и не дающими вклада в интеграл действия J.

Действительно, используя соотношения

$$\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{A} - \operatorname{grad} \varphi, \ \operatorname{div} \vec{E} = \rho,$$

находим

$$\vec{A}\cdot\vec{g} = \vec{A}\left(\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{j}\right) = \vec{A}\cdot\vec{j} + \frac{\partial}{\partial t}(\vec{A}\cdot\vec{E}) - \vec{E}\cdot\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} =$$

$$= \vec{A}\cdot\vec{j} + \frac{\partial}{\partial t}(\vec{A}\cdot\vec{E}) + \vec{E}(\vec{E} + \operatorname{grad}\varphi) =$$

$$= \vec{A}\cdot\vec{j} - \varphi\rho + \vec{E}^2 + \frac{\partial}{\partial t}(\vec{A}\cdot\vec{E}) + \operatorname{div}(\varphi\vec{E}),$$

т. е.

$$L_{\text{Пуанкаре}} = \frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 + j_\mu A_\mu + \frac{\partial}{\partial t}(\vec{A}\cdot\vec{E}) + \operatorname{div}(\varphi\vec{E}).$$

При этом следует подчеркнуть, что современная формулировка принципа наименьшего действия в применении к электромагнитному полю, исходя из лагранжевой функции вида $L = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2$, предполагает связь тензора напряженностей $F_{\mu\nu} = \; F_{oi} = E_i, \;\; F_{ij} = \epsilon_{ijk}H_k$ с потенциалами $A_\mu = (\varphi, \; \vec{A})$ в следующей форме $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$, что эквивалентно выбору из четырех максвелловских уравнений электромагнитного поля пары уравнений

$$\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\vec{H}, \operatorname{div}\vec{H} = 0$$

в качестве условий связи. Пуанкаре, фактически, выбирает в качестве условий связи иную пару уравнений Максвелла-Лоренца, а именно

$$\vec{H} = \operatorname{rot}\vec{A} \;\text{ или }\; \operatorname{div}\vec{H} = 0, \;\text{ и }\; \operatorname{div}\vec{E} = \rho,$$

получая остальные как уравнения движения, следующие из принципа наименьшего действия.

Что касается интеграла J, то он должен быть распространен:

1) относительно элемента объема $d\tau = dx\,dy\,dz$ по всему пространству;

2) относительно времени t на интервал между пределами $t = t_0$, $t = t_1$.

Согласно принципу наименьшего действия, интеграл J должен быть минимумом, если различные входящие в него величины подчинить:

1) условиям (2);

2) условию, что состояние системы задается для двух предельных моментов $t = t_0$ и $t = t_1$.

Это последнее условие позволяет преобразовать наши интегралы при помощи интегрирования по частям.

В самом деле, если мы имеем интеграл вида

$$\int dt\, d\tau\, A \frac{\partial(B\delta C)}{\partial t},$$

где C – одна из величин, определяющих состояние системы, и δC – ее вариация, то, интегрируя его по частям относительно времени, получим

$$\int d\tau \mid AB\delta C|_{t=t_0}^{t=t_1} - \int dt\, d\tau \frac{\partial A}{\partial t} B\delta C.$$

Так как для двух предельных моментов времени состояние системы задано, то $\delta C = 0$ при $t = t_0$, $t = t_1$; поэтому первый интеграл обращается в нуль и остается только второй.

Точно так же можно интегрировать по частям и относительно x, y или z.

В самом деле, имеем

$$\int A \frac{\partial B}{\partial x} dx\, dy\, dz\, dt = \int AB\, dy\, dz\, dt - \int B \frac{\partial A}{\partial x} dx\, dy\, dz\, dt.$$

Так как интегрирования распространяются здесь до бесконечности, то в первом интеграле правой части следует положить $x = \pm\infty$; поэтому, в силу того, что все наши функции предполагаются исчезающими в бесконечности, этот интеграл будет равен нулю, и мы получим

$$\int A \frac{\partial A}{\partial x} d\tau\, dt = -\int B \frac{\partial A}{\partial x} d\tau\, dt.$$

Если предположить, что на систему наложены связи, то к условиям, налагаемым на различные величины, входящие в интеграл J, следует присоединить еще условия связи.

Придадим сначала $\vec{A}$ приращения $\delta\vec{A}$, откуда

$$\delta\vec{H} = \operatorname{rot} \delta\vec{A}$$

Имеем

$$\delta J = \int dt\, d\tau [\vec{H} \cdot \operatorname{rot} \delta \vec{A} - \vec{g} \cdot \delta \vec{A}] = 0,$$

или, интегрируя по частям,

$$\delta J = \int dt\, d\tau [\, \delta \vec{A} \cdot \operatorname{rot} \vec{H} - \vec{g} \cdot \delta \vec{A}\,] = \int dt\, d\tau\, \delta \vec{A} \cdot (\operatorname{rot} \vec{H} - \vec{g}\,) = 0,$$

откуда, приравнивая нулю коэффициент при $\delta \vec{A}$, получим

$$\vec{g} = \operatorname{rot} \vec{H} \tag{3}$$

Интегрируя по частям это соотношение, найдем

$$\int d\tau\, \vec{A}\vec{g} = \int d\tau\, \vec{A} \cdot \operatorname{rot} \vec{H} = \int d\tau\, \vec{H} \cdot \operatorname{rot} \vec{A}$$

или

$$\int d\tau\, \vec{A}\vec{g} = \int d\tau\, \vec{H}^2 ,$$

откуда, наконец,

$$J = \int dt\, d\tau \left(\frac{\vec{E}^2 - \vec{H}^2}{2} \right). \tag{4}$$

Отсюда, а также из соотношения (3) видно, что δJ не зависит от $\delta \vec{A}$, а, следовательно, и от $\delta \vec{H}$,будем варьировать теперь другие переменные.

Возвращаясь к выражению (1), получаем для J:

$$\delta J = \int dt\, d\tau (\vec{E} \cdot \delta \vec{E} - \vec{A} \cdot \delta \vec{g}\,)$$

Но $\vec{E}$ подчинены первому из условий (2), принимающему при этом вид

$$\operatorname{div} \delta \vec{E} = \delta \rho. \tag{5}$$

Поэтому можно написать

$$\delta J = \int dt\, d\tau [\vec{E} \delta \vec{E} - \vec{A} \cdot \delta \vec{g} - \varphi (\operatorname{div} \delta \vec{E} - \delta \rho)]. \tag{6}$$

Согласно методам вариационного исчисления, вычисление следует производить так, как если бы φ была произвольной функцией, а δJ –

представлено выражением (6), и вариации не подчинялись бы более условиям (5).

С другой стороны, мы имеем

$$\delta\vec{g} = \frac{\partial}{\partial t}\,\delta\vec{E} + \delta(\rho\vec{v}\,),$$

откуда, интегрируя по частям, получаем

$$\delta J = \int dt\, d\tau\, \delta\vec{E}\left(\vec{E} + \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} + \vec{\nabla}\varphi\right) + \int dt\, d\tau(\varphi\delta\rho - \vec{A}\,\delta\rho\cdot\vec{v}\,). \tag{7}$$

Если предположить сперва, что электроны не подвергаются вариациям, то $\delta\rho = \delta(\rho\vec{v}\,) = 0$, и второй интеграл равен нулю.

Так как δJ должна обращаться в нуль, то

$$\vec{E} + \frac{\partial}{\partial t}\vec{A} + \vec{\nabla}\varphi = 0. \tag{8}$$

В общем случае будем иметь

$$\delta J = \int dt\, d\tau\,(\varphi\delta\rho - \vec{A}\delta\rho\vec{v}\,). \tag{9}$$

Остается определить силы, действующие на электроны. Для этого предположим, что к каждому элементу электрона приложена дополнительная сила $-\vec{f}\,d\tau$. Напишем условие равновесия этой силы с электромагнитными силами. Пусть ξ_x, ξ_y, ξ_z будут составляющими перемещения элемента $d\tau$ электрона, причем перемещение отсчитывается от какого-нибудь начального положения. Пусть, далее, $\delta\vec{\xi}$ будут вариации этого перемещения; виртуальная работа, соответствующая дополнительной силе, равна

$$-\int \vec{f}\cdot\delta\vec{\xi}\, d\tau,$$

так что условие равновесия напишется в виде

$$\delta J = -\int \vec{f}\,\delta\vec{\xi}\, d\tau\, dt. \tag{10}$$

Необходимо теперь преобразовать δJ. Для этого попытаемся сначала найти уравнение непрерывности, выражающее неизменяемость заряда при вариации.

Пусть $\vec{r}_0$ – начальное положение электрона. Положение его в данный момент будет

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{\xi}.$$

Введем, кроме того, вспомогательную переменную ϵ, при помощи которой будем варьировать наши различные функции, так что, например, для какой-нибудь функции A будем иметь

$$\delta A = \delta\epsilon \frac{\partial A}{\partial \epsilon}.$$

Действительно, мне необходима возможность перехода от обозначений вариационного исчисления к обозначениям обычного дифференциального исчисления, или обратно.

Наши функции можно рассматривать либо зависящими от пяти переменных x, y, z, t, ϵ, так что при изменении t и ϵ наблюдатель всегда остается на одном и том же месте, – в этом случае их производные будем обозначать круглым ∂, либо зависящими от пяти переменных x_0, y_0, z_0, t, ϵ, так что при изменении t и ϵ мы следуем всегда за одним и тем же электроном – в этом случае их производные будем обозначать обыкновенным d.

Тогда будем иметь

$$\vec{v} = \frac{d}{dt}\vec{\xi} = \frac{\partial}{\partial t}\vec{\xi} + (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{\xi} = \frac{d}{dt}\vec{r}. \qquad (11)$$

Обозначим теперь через Δ функциональный определитель x, y, z относительно x_0, y_0, z_0:

$$\Delta = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(x_0, y_0, z_0)} = \frac{\partial(\vec{r})}{\partial(\vec{r}_0)}.$$

Сохраняя ϵ, $\vec{r}_0 = (x_0,\ y_0,\ z_0)$ постоянными, дадим t приращение dt; тогда $\vec{r} = (x,\ y,\ z)$ получат приращения $d\vec{r} = (dx,\ dy,\ dz)$ и Δ – приращение $d\Delta$.

Таким образом,

$$d\vec{r} = \vec{v}\,dt,$$

$$\Delta + d\Delta = \frac{\partial(\vec{r} + d\vec{r})}{\partial(\vec{r}_0)},$$

откуда

$$1+\frac{1}{\Delta}\,d\Delta=\frac{\partial(\vec r+d\vec r)}{\partial(\vec r)}=\frac{\partial(\vec r+\vec v\,dt)}{\partial(\vec r)}.$$

Отсюда получаем

$$\frac{1}{\Delta}\;\frac{d}{dt}\,\Delta=\operatorname{div}\vec v\,(t)\,. \tag{12}$$

Так как заряд каждого электрона остается постоянным, то

$$\frac{d}{dt}\,(\rho\Delta)=0, \tag{13}$$

откуда

$$\frac{d}{dt}\rho+\rho\,\operatorname{div}\vec v=0,\;\;\frac{d}{dt}\rho=\frac{\partial}{\partial t}\,\rho+\vec v\,\cdot\operatorname{grad}\rho,$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\,\rho+\operatorname{div}(\rho\vec v\,)=0.$$

Таковы различные формы уравнения непрерывности в отношении переменной t. Аналогичные уравнения мы найдем и для переменной ϵ. Пусть

$$\delta\vec\xi=\delta\epsilon\cdot\frac{d}{d\,\epsilon}\,\vec\xi;$$

следовательно,

$$\delta\vec\xi=\delta\epsilon\cdot\frac{\partial}{\partial\epsilon}\,\vec\xi+(\delta\vec\xi\cdot\vec\nabla)\vec\xi, \tag{11$'$}$$

$$\frac{1}{\Delta}\;\frac{d\Delta}{d\epsilon}=\operatorname{div}\left(\frac{d}{d\epsilon}\vec\xi\right),\;\frac{d}{d\epsilon}\,(\rho\Delta)=0, \tag{12$'$}$$

$$\delta\,\epsilon\;\frac{d\,\rho}{d\,\epsilon}+\rho\,\operatorname{div}\,(\delta\vec\xi\,)=0,\;\frac{d}{d\epsilon}\,\rho=\frac{\partial}{\partial\epsilon}\,\rho+\left(\frac{\delta}{\delta\epsilon}\;\vec\xi\cdot\vec\nabla\right)\rho,$$

$$\delta\rho+\operatorname{div}(\rho\delta\vec\xi\,)=0. \tag{13$'$}$$

Отметим различие между определением $\delta\vec{\xi} = \delta\epsilon \frac{d}{d\epsilon}\vec{\xi}$ и $\delta\rho = = \delta\epsilon \cdot \frac{\partial}{\partial\epsilon}\rho$; заметим, что именно первое определение более подходит к формуле (10).

Это первое определение позволит нам преобразовать первый член (9).

В самом деле,имеем

$$\int dt\, d\tau \varphi \delta\rho = -\int dt\, d\tau \varphi \operatorname{div}(\rho\delta\vec{\xi}),$$

или, интегрируя по частям,

$$\int dt\, d\tau \varphi \delta\rho = \int dt\, d\tau \rho \delta\vec{\xi} \cdot \operatorname{grad}\varphi. \tag{14}$$

Попробуем теперь вычислить

$$\delta(\rho\vec{v}) = \delta\epsilon \cdot \frac{\partial}{\partial\epsilon}(\rho\vec{v}).$$

Заметим, что $\rho\Delta$ может зависеть только от x_0, y_0, z_0. Действительно, если рассматривать элемент электрона, начальное положение которого определяется прямоугольным параллелепипедом с ребрами dx_0, dy_0, dz_0,то заряд этого элемента равен

$$\rho\Delta dx_0\, dy_0\, dz_0,$$

а так как заряд должен остаться постоянным, то

$$\frac{d}{dt}(\rho\Delta) = \frac{d}{d\epsilon}(\rho\Delta) = 0. \tag{15}$$

Отсюда получаем

$$\frac{d^2}{dt\, d\epsilon}(\rho\Delta\vec{\xi}) = \frac{d}{d\epsilon}\left(\rho\Delta \frac{d}{dt}\vec{\xi}\right) = \frac{d}{dt}\left(\rho\Delta \frac{d}{d\epsilon}\vec{\xi}\right). \tag{16}$$

Но в силу уравнения непрерывности имеем для какой угодно функции A:

$$\frac{1}{\Delta}\frac{d}{dt}(A\Delta) = \frac{\partial}{\partial t}A + \operatorname{div}(A\vec{v}),$$

а также

$$\frac{1}{\Delta}\frac{d}{d\epsilon}(A\Delta)=\frac{\partial}{\partial\epsilon}A+\operatorname{div}\left(A\frac{d}{d\epsilon}\vec{\xi}\right).$$

Следовательно, ($i = x, y, z$)

$$\frac{1}{\Delta}\frac{d}{d\epsilon}\left(\rho\Delta\frac{d}{dt}\xi_i\right)=\frac{\partial}{\partial\epsilon}\left(\rho\frac{d}{dt}\xi_i\right)+\operatorname{div}\left(\rho\frac{d}{d\epsilon}\vec{\xi}\cdot\frac{d}{dt}\xi_i\right), \qquad (17)$$

$$\frac{1}{\Delta}\frac{d}{dt}\left(\rho\Delta\frac{d}{d\epsilon}\xi_i\right)=\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho\frac{d}{d\epsilon}\xi_i\right)+\operatorname{div}\left(\rho\cdot\frac{d}{dt}\vec{\xi}\cdot\frac{d}{d\epsilon}\xi_i\right). \qquad (17')$$

Вторые члены (17) и (17′) должны быть одинаковы, поэтому, приняв во внимание, что

$$\frac{d}{dt}\vec{\xi}=\vec{v},\quad \delta\epsilon\cdot\frac{d}{d\epsilon}\vec{\xi}=\delta\vec{\xi},\quad \delta\epsilon\frac{\partial}{\partial\epsilon}(\rho\vec{v})=\delta(\rho\vec{v}),$$

получаем

$$\delta(\rho v_i)+\operatorname{div}(\rho v_i\delta\vec{\xi})=\frac{\partial}{\partial t}(\rho\delta\xi_i)+\operatorname{div}(\rho\vec{v}\,\delta\xi_i). \qquad (18)$$

Преобразуем теперь вторую часть (9); имеем

$$\int dt\,d\tau\,\vec{A}\,\delta(\rho\vec{v})=\int dt\,d\tau\left[A_i\frac{\partial}{\partial t}(\rho\delta\xi_i)+A_i\operatorname{div}(\rho\vec{v}\,\delta\xi_i)-A_i\operatorname{div}(\rho v_i\delta\vec{\xi})\right].$$

(здесь предполагается суммирование по повторяющимся индексам). После интегрирования по частям правая часть примет вид

$$\int dt\,d\tau\left[-\rho\delta\vec{\xi}\cdot\frac{\partial}{\partial t}\vec{A}-\rho\delta\xi_i(\vec{v}\cdot\vec{\nabla})A_i+\rho v_i(\delta\vec{\xi}\cdot\vec{\nabla})A_i\right].$$

Вспомнив же, что

$$\operatorname{rot}\vec{A}=\vec{H},$$

получим

$$\int dt\,d\tau\left[-\rho\delta\vec{\xi}\cdot\frac{\partial}{\partial t}\vec{A}+\rho(\delta\vec{\xi}\cdot[\vec{v}\times\vec{H}])\right].$$

Таким образом, окончательно

$$\delta J = \int dt\, d\tau \rho \delta \vec{\xi} \cdot \left(\vec{\nabla}\varphi + \frac{\partial}{\partial t}\vec{A} + [\vec{H} \times \vec{v}\,]\right) = \int dt\, d\tau \rho \delta \vec{\xi}\, (-\vec{E} + [\vec{H} \times \vec{v}\,]).$$

Приравнивая коэффициэнты при $\delta\vec{\xi}$ в последнем выражении и в (10), получим

$$\vec{f} = \rho \vec{E} + \rho [\vec{v} \times \vec{H}];$$

а это и есть не что иное, как уравнение (2) предыдущего параграфа.

§ 3. Преобразование Лоренца и принцип наименьшего действия

Посмотрим, не указывает ли принцип наименьшего действия на причину успеха преобразований Лоренца. Для этого прежде всего нужно знать, как изменится в результате этого преобразования интеграл (формула (4) § 2):

$$J = \int dt\, d\tau \left(\frac{\vec{E}^{\,2} - \vec{H}^2}{2}\right).$$

Мы находим сначала, что

$$dt'\, d\tau' = l^4\, dt\, d\tau,$$

ибо x', y', z', t' связаны с x, y, z, t линейными соотношениями, определитель которых равен l^4.

Затем получаем

$$l^4 \vec{E}'^2 = E_x^2 + \gamma^2 (E_y^2 + E_z^2) + \gamma^2 \beta^2 (H_y^2 + H_z^2) - 2\gamma^2 \beta [\vec{E} \times \vec{H}]_x, \qquad (1)$$

$$l^4 \vec{H}'^2 = H_x^2 + \gamma^2 (H_y^2 + H_z^2) + \gamma^2 \beta^2 (E_y^2 + E_z^2) - 2\gamma^2 \beta [\vec{E} \times \vec{H}]_x$$

(формулы (9) § 1), откуда

$$l^4 (\vec{E}'^2 - \vec{H}'^2) = \vec{E}^2 - \vec{H}^2.$$

Таким образом, полагая

$$J' = \int dt'd\tau' \frac{\vec{E}'^2 - \vec{H}'^2}{2},$$

получим

$$J' = J.$$

Однако для того, чтобы это равенство имело силу, необходимо, чтобы пределы интегрирования в обоих случаях были одни и те же. До сих пор мы принимали, что t изменяется от t_0 до t_1 и x, y, z от $-\infty$ до $+\infty$. В результате преобразования Лоренца эти пределы интегрирования будут изменены; однако ничто не мешает нам положить $t_0 = -\infty$ и $t_1 = +\infty$; при этих условиях пределы для J и J' останутся те же.

Сравним теперь два следующих выражения, аналогичных (10) § 2:

$$\begin{aligned} \delta J &= -\int \vec{f} \cdot \delta\vec{\xi}\, d\tau\, dt, \\ \delta J' &= -\int \vec{f}' \cdot \delta\vec{\xi}'\, d\tau'\, dt'. \end{aligned} \tag{2}$$

Для этого сравним сначала $\delta\vec{\xi}$ и $\delta\vec{\xi}'$. Будем рассматривать электрон, начальные координаты которого равны x_0, y_0, z_0; тогда в момент t

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{\xi}.$$

Рассматривая электрон соответственно после преобразования Лоренца, будем иметь

$$x' = \gamma l(x - \beta t),\ \ y' = ly,\ \ z' = lz,$$

где

$$\vec{r}' = \vec{r}_0 + \vec{\xi}',$$

но эти координаты будут достигнуты только в момент

$$t' = \gamma l(t - \beta x).$$

Если мы подвергнем наши переменные вариациям $\delta\vec{\xi}$ и одновременно дадим t приращение δt, то координаты x, y, z получат полное приращение:

$$\delta\vec{r} = \delta\vec{\xi} + \vec{v}\,\delta t.$$

Аналогично будет

$$\delta\vec{r}\,' = \delta\vec{\xi}\,' + \vec{v}\,'\cdot\delta t'.$$

В силу преобразования Лоренца,

$$\delta x' = \gamma l(\delta x - \beta\delta t),\ \delta y' = l\delta y,\ \delta z' = l\delta z,\ \delta t' = \gamma l(\delta t - \beta\delta x),$$

откуда, полагая $\delta t = 0$, получим соотношения

$$\delta x = \delta\xi'_x + v'_x\delta t' = \gamma l\delta\xi_x,$$

$$\delta y' = \delta\xi'_y + v'_y\delta t' = l\delta\xi_y,$$

$$\delta z' = \delta\xi'_z + v'_x\delta t' = l\delta\xi_x,$$

$$\delta t' = -\gamma l\beta\delta\xi_x$$

* Приведенные здесь выкладки прямо указывают на относительность интервалов длин и времени, измеренных в различных инерциальных системах координат. В частности, первое из этих соотношений показывает, что интервал продольных расстояний, определяемый разностью положений двух точек вдоль оси x $(\delta\xi_x)$, измеренных в один и тот же момент времени $(\delta t = 0)$ в некоторой движущейся со скоростью β вдоль оси x инерциальной системе, сокращается в $l\gamma = l(1-\beta^2)^{-1/2}$ раз по сравнению со значением этого интервала $(\delta x')$ в покоящейся системе. Свойство одновременности в покоящейся системе координат теряет свою силу, как как $\delta t' = -\gamma l\beta\delta\xi_x \neq 0$. Эта реализованная в преобразованиях Лоренца относительность одновременности двух физических событий, равно как и относительность факта равенства двух интервалов времени, была замечательным образом предвосхищена Пуанкаре в опубликованной им в 1898 году статье "Измерение времени", в которой был дан глубокий

критический анализ понятия одновременности и развита идея обусловленности физических представлений о времени с характером причинно-следственных связей. Приведем в этой связи два высказывания Пуанкаре из этой работы.[11]

"Трудно отделить качественную проблему одновременности от количественной проблемы измерения времени."

"Мы не можем непосредственно на основе интуиции определить ни одновременность, ни равенство двух промежутков времени."

Заметим, что

$$v'_x = \frac{v_x - \beta}{1 - \beta v_x}, \quad v'_y = \gamma^{-1} \frac{v_y}{1 - \beta v_x}, \quad v'_z = \gamma^{-1} \frac{v_z}{1 - \beta v_x};$$

поэтому, заменяя $\delta t'$ его значением, будем иметь

$$\gamma l(1 - \beta v_x)\delta\xi_x = \delta\xi'_x(1 - \beta v_x) - (v_x - \beta)\gamma l\beta\delta\xi_x,$$

$$l(1 - \beta v_x)\delta\xi_y = \delta\xi'_y(1 - \beta v_x) - v_y l\beta\delta\xi_x,$$

$$l(1 - \beta v_x)\delta\xi_z = \delta\xi'_z(1 - \beta v_x) - v_z l\beta\delta\xi_x.$$

Вспоминая определение γ, получим отсюда

$$\delta\xi_x = \gamma l^{-1}(1 - \beta v_x)\delta\xi'_x,$$

$$\delta\xi_y = l^{-1}\delta\xi'_y - \gamma l^{-1}\beta v_y\delta\xi'_x,$$

$$\delta\xi_z = l^{-1}\delta\xi'_z - \gamma l^{-1}\beta v_z\delta\xi'_x,$$

откуда

$$\vec f\delta\vec\xi = l^{-1}(\gamma f_x\cdot\delta\xi'_x + f_y\cdot\delta\xi'_y + f_z\cdot\delta\xi'_z) - \gamma l^{-1}\beta\delta\xi'_x(\vec f\,\vec v). \quad (3)$$

В силу же уравнений (2) будет

$$\int \vec f'\cdot\delta\vec\xi' dt'd\tau' = l^{-4}\int \vec f\cdot\delta\vec\xi\, dt'd\tau' = \int \vec f\cdot\delta\vec\xi\, dt\, d\tau.$$

---

[11] А.Пуанкаре. Измерение времени. – Revue de Metaphysique et de Morale, 1898, t. YI, p. 1–13 (Перевод с франц. И.С.Зарубиной.)

Заменяя $\vec{f}\cdot\delta\vec{\xi}$ на его значение (3), получим

$$f_x' = \gamma l^{-5} f_x - \gamma l^{-5} \beta(\vec{f}\vec{v}), \; f_y' = l^{-5} f_y, \; f_z' = l^{-5} f_z,$$

т. е. уравнения (11) § 1.

Таким образом, принцип наименьшего действия привел нас к тому же результату, что и исследование § 1.

> "Я не могу здесь привести все прекрасные результаты, полученные Пуанкаре. Все же подчеркнем некоторые из них. Прежде всего, он не ограничился показом того, что релятивистские преобразования оставляют неизменной форму электромагнитных уравнений. Он объясняет успех подстановок тем, что эти уравнения могут быть представлены в форме принципа наименьшего действия, и что фундаментальное уравнение, выражающее этот принцип, а также операции, с помощью которых выводятся уравнения поля, одинаковы в системах x, y, z, t и x', y', z', t'."
>
> Г.А.Лоренц
> Две статьи Анри Пуанкаре
> о математической физике.[12]

Обращаясь к формулам (1), мы видим, что в результате преобразования Лоренца выражение

$$\vec{E}^2 - \vec{H}^2,$$

за исключением постоянного множителя, осталось неизменным; этого нельзя сказать о выражении

$$\vec{E}^2 + \vec{H}^2,$$

входящем в энергию. Ограничиваясь случаем достаточно малого β для того, чтобы можно было пренебречь его квадратом, т. е. считая $\gamma = 1$ и полагая также $l = 1$, мы находим

$$\vec{E}'^2 = \vec{E}^2 - 2\beta\,[\vec{E}\times\vec{H}]_x.$$

$$\vec{H}'^2 = \vec{H}^2 - 2\beta\,[\vec{E}\times\vec{H}]_x$$

---

[12] Deux memoires de Henri Poincare sur la physique mathematique, Acta math., 1914, vol. 38, p. 293.

или, складывая,

$$\vec{E}'^2 + \vec{H}'^2 = \vec{E}^2 + \vec{H}^2 - 4\beta\,[\vec{E} \times \vec{H}]_x.$$

§ 4. Группа Лоренца

"В основе специальной теории относительности лежит математическое понятие группы".

В. Паули[13]

Важно отметить, что преобразования Лоренца образуют группу. В самом деле, полагая

$$x' = \gamma l(x - \beta t),\ y' = ly,\ z' = lz,$$

$$t' = \gamma l(t - \beta x),$$

и, с другой стороны,

$$x'' = \gamma' l'(x' - \beta' t'),\ y'' = l'y',\ z'' = l'z',$$

$$t'' = \gamma' l'(t' - \beta' x'),$$

где

$$\gamma^{-2} = 1 - \beta^2,\ \gamma'^{-2} = 1 - \beta'^2,$$

получаем

$$x'' = \gamma'' l''(x - \beta'' t),\ y'' = l''y,\ z'' = l''z,$$

$$t'' = \gamma'' l''(t - \beta'' x),$$

где

$$\beta'' = \frac{\beta + \beta'}{1 + \beta\beta'},\ l'' = ll',$$

$$\gamma'' = \gamma\gamma'(1 + \beta\beta') = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta''^2}}.$$

---

[13] В.Паули. Теория относительности и наука. Опубликовано в журнале: Universitas 1958, 13, p.p. 583–598.

Если мы придадим l значение 1, считая β бесконечно малым, т.е. положив

$$\vec{r}\,' = \vec{r} + \delta\vec{r},\ t' = t + \delta t,$$

то получим

$$\delta x = -\beta t,\ \delta y = \delta z = 0,\ \delta t = -\beta x.$$

Это и есть то бесконечно малое преобразование группы, которое я назову преобразованием T_1 и которое, согласно Ли, можно представить в виде

$$t\frac{\partial\varphi}{\partial x} + x\frac{\partial\varphi}{\partial t} = T_1\varphi.$$

Напротив, полагая $\beta = 0$ и $l = 1 + \delta l$, мы найдем

$$\delta x = x\delta l, \quad \delta y = y\delta l, \quad \delta z = z\delta l, \quad \delta t = t\delta l$$

и получим другое бесконечно малое преобразование T_0 группы (рассматривая l и β как независимые переменные). которое в обозначениях Ли можнс представить в виде

$$T_0\varphi = x\frac{\partial\varphi}{\partial x} + y\frac{\partial\varphi}{\partial y} + z\frac{\partial\varphi}{\partial z} + t\frac{\partial\varphi}{\partial t}.$$

Придавая особенную роль, которую до сих пор играла ось x, осям y и z, получаем таким образом два других бесконечно малых преобразования

$$T_2\varphi = t\frac{\partial\varphi}{\partial y} + y\frac{\partial\varphi}{\partial t},$$
$$T_3\varphi = t\frac{\partial\varphi}{\partial z} + z\frac{\partial\varphi}{\partial t},$$

которые тоже не изменяют уравнений Лоренца.

Можно образовать различные комбинации, введенные Ли, например:

$$[T_1, T_2]\varphi = x\frac{\partial\varphi}{\partial y} - y\frac{\partial\varphi}{\partial x}.$$

Легко, однако, видеть, что это последнее преобразование эквивалентно преобразованию осей координат, когда они поворачиваются на весьма малый угол вокруг оси z. Мы не должны поэтому удивляться, если подобное преобразование не изменяет формы уравнений Лоренца, очевидно, не зависимых от выбора осей.

Итак, мы приходим к необходимости рассмотреть непрерывную группу, которую мы назовем *группой Лоренца* и которая допускает следующие бесконечно малые преобразования:

1) преобразование T_0, которое будет переставимо со всеми остальными;

2) три преобразования T_1, T_2, T_3;

3) три вращения $[T_1, T_2]$, $[T_2, T_3]$, $[T_3, T_1]$.

Любое из преобразований этой группы можно разложить на преобразование вида

$$x' = lx, y' = ly, z' = lz, t' = lt$$

и линейное преобразование, не изменяющее квадратичной формы

$$x^2 + y^2 + z - t^2.$$

Мы можем также образовать нашу группу несколько иным способом. Каждое преобразование группы можно рассматривать как преобразование вида

$$x' = \gamma l(x - \beta t), y' = ly, z' = lz, t' = \gamma l(t - \beta x), \tag{1}$$

которому предшествует и за которым следует соответствующий поворот.

Однако для нашей цели достаточно рассмотреть только часть преобразований этой группы; будем считать, что l есть функция от β, и выберем эту функцию так, чтобы та часть группы, которую я обозначу через P, все еще образовывала группу.

Вращая систему на 180° вокруг оси y, мы получим преобразование, которое опять должно принадлежать к P. Так как это приводит к изменению знака x, x', z, и z', то мы находим

$$x' = \gamma l(x + \beta t), y' = ly, z' = lz, t' = \gamma l(t + \beta x). \tag{2}$$

Следовательно, от перемены знака β, l не меняется. С другой стороны, если P есть группа, то подстановка, обратная (1), которую можно представить в виде

$$x' = \frac{\gamma}{l}(x + \beta t), y' = \frac{y}{l}, z' = \frac{z}{l}, t' = \frac{\gamma}{l}(t + \beta x), \tag{3}$$

также должна принадлежать к P; она должна быть, таким образом, тождественной (2), т.е.

$$l = \frac{1}{l}.$$

Следовательно, $l = 1$.

§ 5. Волны Ланжевена

Формулы, определяющие электромагнитное поле, обусловленное движением одного электрона, были представлены Ланжевеном в особенно изящной форме.

Рассмотрим снова уравнения

$$\Box\varphi = -\rho, \quad \Box\vec{A} = -\rho\vec{V}. \tag{1}$$

Известно, что решения их можно получить при помощи запаздывающих потенциалов

$$\varphi = \frac{1}{4\pi}\int\frac{\rho_1 d\tau_1}{r}, \vec{A} = \frac{1}{4\pi}\int\frac{\rho_1\vec{V}_1 d\tau_1}{r}. \tag{2}$$

В этих формулах

$$d\tau_1 = dx_1 dy_1 dz_1, \quad r^2 = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2,$$

тогда как ρ_1 и $\vec{V}_1$ – значения ρ и $\vec{V}$ в точке $\vec{r}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ и в момент $t_1 = t - r$.

Пусть $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ – координаты элемента электрона в момент t_0; тогда

$$\vec{r}_1 = \vec{r}_0 + \vec{\xi}$$

будут его координатами в момент t_1.

$\vec{\xi} = (\xi_x, \xi_y, \xi_z)$ – функции x_0, y_0, z_0, t_1, поэтому мы можем написать

$$d\vec{r}_1 = d\vec{r}_0 + (dr_0 \cdot \nabla)\vec{\xi} + \vec{V}_1 \cdot dt_1$$

и, если считать t, а также x, y и z постоянными, то

$$dt_1 = d\vec{r}_1 \cdot \frac{\vec{r} - \vec{r}_1}{r}.$$

Следовательно, получаем

$$d\vec{r}_1 + \vec{V}_1\left(d\vec{r}_1 \cdot \frac{\vec{r}_1-\vec{r}}{r}\right) = d\vec{r}_0 + (d\vec{r}_0 \cdot \nabla_{r_0})\vec{\xi}$$

Таким образом, полагая $d\tau_0 = dx_0dy_0dz_0$, будем иметь

$$d\tau_0\left|\frac{\partial(\vec{r}_0+\vec{\xi})}{\partial(\vec{r}_0)}\right| = d\tau_1 \cdot det\left|\delta_{ij} + (\vec{V}_1)_i\left(\frac{\vec{r}_1-\vec{r}}{r}\right)_j\right| \qquad (3)$$

Исследуем определители, стоящие в обеих частях (3), и прежде всего первый из них; разложив его, мы увидим, что члены 2-й и 3-й степени относительно $\vec{V}_1$ обращаются в нуль, и определитель равен:

$$det|\delta_{ij} +(\vec{V}_1)_i\left(\frac{\vec{r}_1-\vec{r}}{r}\right)_j| = 1 + \omega,$$

где ω— радиальная составляющая скорости $\vec{V}_1$, т.е. составляющая, направленная по радиусу-вектору, соединяющему точки $\vec{r}$ и $\vec{r}_1$.

Для того чтобы получить второй определитель, найдем координаты различных элементов электрона в момент t', одинаковый для всех элементов, однако такой, чтобы для наблюдаемого элемента $t_1 = t'_1$. Тогда координаты элементов представятся в виде

$$\vec{r}_1{}' = \vec{r}_0 + \vec{\xi}',$$

где $\vec{\xi}'$ получаются из $\vec{\xi}$ заменой t_1 на t'_1.

Так как t'_1 одно и то же для всех элементов, то

$$d\vec{r}_1 = d\vec{r}_0 + (dr_0 \cdot \nabla\ )\vec{\xi}'$$

и, следовательно,

$$d\tau'_1 = d\tau_0\left|\frac{\partial(\vec{r}_0+\vec{\xi}')}{\partial(\vec{r}_0)}\right| ,$$

где

$$d\tau'_1 = dx'_1dy'_1dz'_1 .$$

Но элемент электрического заряда равен

$$d\mu_1 = \rho_1 d\tau'_1,$$

и сверх того *для наблюдаемого элемента* электрона $t_1 = t'_1$, а поэтому

$$(\vec{\nabla}_{r_0})_i \vec{\xi}'_j = (\vec{\nabla}_{r_0})_i \vec{\xi}_j.$$

Мы можем, следовательно, написать

$$d\mu_1 = \rho_1 d\tau_0 \left| \frac{\partial(\vec{r}_0 + \vec{\xi})}{\partial(\vec{r}_0)} \right|,$$

так что уравнения (3) и (2) перепишутся в виде

$$\rho_1 d\tau_1 (1 + \omega) = d\mu_1,$$

$$\varphi = \frac{1}{4\pi} \int \frac{d\mu_1}{r(1+\omega)}, \quad \vec{A} = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\vec{V}_1 d\mu_1}{r(1+\omega)}. \tag{3'}$$

Когда мы имеем дело только с одним электроном, то наши интегралы сведутся к одному члену, если рассматривать только точки x, y, z, достаточно удаленные для того, чтобы r и ω имели тогда одно и то же значение для всех точек электрона. Потенциалы $\varphi, \vec{A}$ зависят от положения этого электрона, а также от его скорости, ибо не только $\vec{V}_1$ входят в числители выражений $\vec{A}$, но и в их знаменатели входит также и радиальная составляющая ω.Разумеется, речь идет о положении и скорости электрона в момент t_1.

Частные производные от $\varphi, \vec{A}$ по t, x, y, z (а, следовательно, электрическое и магнитное поля) будут зависеть, кроме того, и от его ускорения; притом эта зависимость будет *линейной*, так как ускорение войдет в производные только от одного дифференцирования.

Ланжевен пришел таким образом к необходимости различать в электрическом и магнитном поле члены, не зависящие от ускорения (то, что он называет волной скорости), и члены, пропорциональные ускорению (волна ускорения).

Вычисление этих двух волн сильно упрощается благодаря преобразованию Лоренца. В самом деле, мы можем применить это преобразование к системе таким образом, чтобы скорость рассматриваемого электрона сделалась равной нулю. Выберем для оси x направление этой скорости до преобразования, так что в момент t_1

$$(v_1)_y = (v_1)_z = 0,$$

и положим $\beta = (v_1)_x$, так что

$$\vec{v}'_1 = 0.$$

Мы можем таким образом свести вычисление двух волн к случаю, когда скорость электрона равна нулю. Начнем с волны скорости. Прежде всего заметим, что эта волна будет такой же, как и при равномерном движении электрона.

Если скорость электрона равна нулю, то

$$\omega = 0, \quad \vec{A} = 0, \quad \varphi = \frac{\mu_1}{4\pi r},$$

где μ— заряд электрона.

Так как скорость электрона сведена к нулю в результате преобразования Лоренца, то

$$\vec{A}' = 0, \quad \varphi' = \frac{\mu_1}{4\pi r'},$$

где r' — расстояние между точками $\vec{r}'$ и $\vec{r}'_1$ и, следовательно:

$$\vec{H}' = 0,$$

$$\vec{E}' = \frac{\mu_1}{4\pi r'^3}(\vec{r}' - \vec{r}'_1).$$

Для нахождения истинного поля, соответствующего скорости $\vec{v}_1 = (\beta, 0, 0)$, применим теперь преобразование, обратное преобразованию Лоренца.

Обращаясь к уравнениям (9) и (3) § 1, находим

$$\vec{H} = [\vec{\nabla}_1 \times \vec{E}],$$

$$\vec{E} = \frac{\mu_1}{4\pi r'^3} \cdot \gamma l^3 \cdot [(\vec{r} - \vec{r}_1) - \vec{v}_1(t - t_1)]. \tag{4}$$

Легко видеть, что магнитное поле перпендикулярно к оси x (направлению скорости) и к электрическому полю, причем последнее направлено к точке

$$\vec{r}_1 - \vec{v}_1(t_1 - t). \tag{5}$$

Если бы электрон продолжал двигаться равномерно и прямолинейно со скоростью, которую он имел в момент t_1, т.е. со скоростью $\vec{v}_1 = (\beta, 0, 0)$, то этой точки (5) он достиг бы в момент t.

Перейдем теперь к волне ускорения; благодаря преобразованию Лоренца мы можем свести ее определение к случаю, когда скорость равна нулю. Этот случай может быть осуществлен, если представить, что электрон совершает очень быстрые колебания весьма малой амплитуды, при этом перемещения и скорости будут бесконечно малыми, а ускорения – конечными. Таким образом, мы приходим к случаю, изученному уже Герцем в его знаменитом мемуаре "Die Krafte elektrischer Schwingungen nach der Maxwellschen Theorie" (Силы электрических колебаний по теории Максвелла), для очень удаленной точки. При этих условиях электрическое и магнитное поля будут:

1) равны друг другу;

2) взаимно перпендикулярны и

3) перпендикулярны к нормали волновой сферы, т.е. сферы с центром в точке $\vec{r}_1 = (x_1, y_1, z_1)$.

Я утверждаю, что эти три свойства будут иметь место также и тогда, когда скорость не будет равна нулю. Для этого мне достаточно показать, что они не изменяются от преобразования Лоренца.

В самом деле, пусть A есть общее напряжение обоих полей и пусть

$$(\vec{r}-\vec{r}_1) = r\cdot\vec{n}\ , \vec{n}^2 = 1.$$

Указанные свойства выражаются равенствами

$$A^2 = \vec{E}^2 = \vec{H}^2,$$

$$\vec{E}\cdot(\vec{r}-\vec{r}_1) = 0, \vec{H}\cdot(\vec{r}-\vec{r}_1) = 0,$$

$$\vec{E}\cdot\vec{n} = 0, \vec{H}\cdot\vec{n} = 0,$$

причем

$$\vec{E}/A,\ \vec{H}/A, \vec{n}$$

будут направляющими векторами трех перпендикулярных направлений.

Отсюда получаем соотношения

$$\vec{E} = [\vec{H}\times\vec{n}], \vec{H} = [\vec{n}\times\vec{E}]$$

или

$$\begin{aligned} r\vec{E} &= [\vec{H}\times(\vec{r}-\vec{r}_1)], \\ r\vec{H} &= -[\vec{E}\times(\vec{r}-\vec{r}_1)]. \end{aligned} \tag{6}$$

Обращаясь к уравнениям (3) § 1, мы найдем

$$
\begin{gathered}
x' - x_1' = \gamma l\,[(x - x_1) - \beta(t - t_1)] = \gamma l[(x - x_1) - \beta r],\\
y' - y_1' = l(y - y_1), \qquad (7)\\
z' - z_1' = l(z - z_1).
\end{gathered}
$$

Мы нашли выше в § 3:

$$l^4(\vec{E}'^2 - \vec{H}'^2) = (\vec{E}^2 - \vec{H}^2).$$

Следовательно, равенство $\vec{E}^{\,2} = \vec{H}^{\,2}$ влечет за собой $\vec{E}'^2 = \vec{H}'^2$. С другой стороны, исходя из уравнений (9) § 1, получаем соотношение

$$l^4\vec{E}' \cdot \vec{H}' = \vec{E}\cdot\vec{H}\ ,$$

которое показывает, что если $\vec{E}\cdot\vec{H} = 0$, то $\vec{E}'\cdot\vec{H}' = 0$.

Я утверждаю теперь, что

$$\vec{E}' \cdot (\vec{r}\,' - \vec{r}_1\,') = 0,\ \ \vec{H}' \cdot (\vec{r}\,' - \vec{r}\,'_1) = 0\ . \qquad (8)$$

В самом деле, в силу (7), а также (9) §1, левые части обоих уравнений (8) перепишутся соответственно в виде

$$\frac{\gamma}{l}\vec{E}\cdot(\vec{r} - \vec{r}_1) - \frac{\gamma}{l}r(\vec{E}\cdot\vec{v}_1) - \frac{\gamma}{l}(\vec{v}_1 \cdot [(\vec{r} - \vec{r}_1) \times \vec{H}])\ ,$$

$$\frac{\gamma}{l}\vec{H}\cdot(\vec{r} - \vec{r}_1) - \frac{\gamma}{l}r(\vec{H}\cdot\vec{v}_1) + \frac{\gamma}{l}(\vec{v}_1 \cdot [(\vec{r} - \vec{r}_1) \times \vec{E}])\ ,$$

но, согласно уравнениям

$$\vec{E}\cdot(\vec{r} - \vec{r}_1) = \vec{H}\cdot(\vec{r} - \vec{r}_1) = 0,$$

а также уравнению (6), они обращаются в нуль, что как раз и нужно было показать.

Впрочем, к этому же результату можно прийти, исходя из простых соображений однородности.

В самом деле, φ, A – однородные функции от

$$\vec{r}-\vec{r}_1, \vec{v}_1 = \frac{d\vec{r}_1}{dt_1}$$

степени – 1 относительно $\vec{r}$, t, $\vec{r}_1$, t, и их дифференциалов.

Таким образом, производные φ, $\vec{A}$ по $\vec{r}$, t (а следовательно, оба поля $\vec{E}$ и $\vec{H}$ будут однородными функциями степени – 2 относительно тех же величин, если мы вспомним при этом, что соотношение

$$t - t_1 = r = |\vec{r}-\vec{r}_1|$$

однородно относительно этих величин.

Но эти производные или поля зависят от $\vec{r}-\vec{r}_1$, скоростей $d\vec{r}_1/dt_1$ и ускорений $d^2\vec{r}_1/dt_1^2$; они составлены из члена, не зависящего от ускорений (волна скорости), и члена, линейного относительно ускорений (волна ускорений). Производная $d\vec{r}_1/dt_1$ есть однородная функция степени 0, а $d^2\vec{r}_1/dt_1^2$ – степени – 1, откуда следует, что волна скорости есть однородная функция степени – 2 относительно $(\vec{r}-\vec{r}_1)$, а волна ускорения – однородная функция степени – 1. Таким образом, в весьма удаленной точке преобладает волна ускорения, которую можно рассматривать, следовательно, как полную волну.

Кроме того, закон однородности показывает нам, что волна ускорения в произвольной точке подобна самой себе в удаленной точке и, следовательно, подобна полной волне в удаленной точке. Но так как в удаленной точке возмущение может распространяться только в виде плоских волн, то оба поля должны быть равны друг другу, взаимно перпендикулярны и перпендикулярны к направлению распространения.

Я ограничусь этими соображениями, отсылая интересующихся деталями к мемуару Ланжевена (Journal de Physique, 1905).

§ 6. Сокращение электронов

Представим себе электрон, находящийся в равномерном и прямолинейном поступательном движении. Согласно указанному выше, можно, при помощи преобразования Лоренца, свести изучение поля, обусловленного этим электроном, к случаю неподвижного электрона; таким образом, преобразование Лоренца заменяет реальный движущийся электрон некоторым воображаемым неподвижным электроном.

Пусть $\vec{E}$, $\vec{H}$ — реальное поле и $\vec{E}'$, $\vec{H}'$ — поле, получающееся после преобразования Лоренца, т.е. соответствуюшее неподвижному электрону.

Тогда имеем

$$\vec{H}' = 0$$

$$\vec{E}' = -\vec{\nabla}' \cdot \varphi',$$

и для реального поля (согласно формулам (9) §1)

$$H_x = 0,\ H_y = -\beta E_z, H_z = \beta E_y,$$

$$E_x = l^2 E'_x, E_y = \gamma l^2 E'_y, E_z = \gamma l^2 E'_z. \tag{1}$$

Определим сейчас полную энергию движения электрона, а также соответствующее действие и электромагнитное количество движения, чтобы затем перейти к вычислению электромагнитных масс электрона. Для удаленной точки достаточно рассматривать электрон в виде одной точки; таким образом можно свести все вычисление к формулам (4) предыдущего параграфа, которые, вообще говоря, окажутся пригодными. Однако здесь они будут недостаточны, так как энергия локализуется главным образом в наиболее близких к электрону частях эфира.

Относительно этого пункта можно высказать несколько гипотез.

Согласно Абрагаму, электроны представляются сферическими и недеформируемыми.

Тогда, применяя преобразование Лоренца, мы видим, что если реальный электрон был сферическим, то воображаемый становится эллипсоидальным. Уравнение эллипсоида, согласно § 1, имеет вид

$$\gamma^2[x'(1-\beta v_x) - t'(v_x - \beta)]^2 + [y' - v_y \gamma(t' + \beta x')]^2 +$$
$$+ [z' - v_z \gamma(t' + \beta x')]^2 = l^2 r^2.$$

Но в данном случае

$$v_x - \beta = v_y = v_z = 0,\ \ 1 - \beta v_x = 1 - \beta^2 = \gamma^{-2}$$

так что уравнение эллипсоида принимает следующий вид:

$$x'^2/\gamma^2 + y'^2 + z'^2 = l^2 r^2.$$

Если радиус реального электрона есть r, то полуоси воображаемого электрона равны γlr, lr, lr.

Напротив, по гипотезе Лоренца электроны при движении деформируются таким образом, что реальный электрон становится эллипсоидом, в то время как воображаемый покоящийся электрон всегда представляется шаром радиуса r; тогда полуоси реального электрона равны

$$\frac{r}{l\gamma}, \frac{r}{l}, \frac{r}{l}.$$

Назовем выражения

$$A = \frac{1}{2}\int E_x^2 d\tau$$

продольной электрической энергией,

$$B = \frac{1}{2}\int (E_y^2 + E_z^2) d\tau$$

поперечной электрической энергией и

$$C = \frac{1}{2}\int (H_y^2 + H_z^2) d\tau$$

поперечной магнитной энергией.

Продольной магнитной энергии не существует, так как $H_x = H_x' = 0$. Обозначим через A', B', C' соответствующие величины в преобразованной системе.

Прежде всего находим

$$C' = 0, \quad C = \beta^2 B.$$

С другой стороны, замечая, что реальное поле зависит только от $x - \beta t, y, z$, мы можем написать

$$d\tau = d(x - \beta t) dx dz,$$

$$d\tau' = dx' dy' dz' = \gamma l^3 d\tau.$$

откуда

$$A' = \gamma \Gamma^{1} A, \; B' = \gamma^{-1} \Gamma^{1} B,$$

$$A = l\gamma^{-1} A', \; B = \gamma l B'.$$

В гипотезе Лоренца $B' = 2A'$, где A' – постоянная, обратно пропорциональная радиусу электрона и не зависящая от скорости реального электрона.

Таким образом, для полной энергии получаем

$$A + B + C = A' l \gamma (3 + \beta^2),$$

и для действия (в единицу времени)

$$A + B - C = 3\frac{A' l}{\gamma}.$$

Далее, для электромагнитного количества движения находим

$$P = \int d\tau (E_y H_z - E_z H_y) = \beta \int d\tau (E_y^2 + E_z^2) = 2\beta B = 4\beta\gamma l A'.$$

Но между энергией $E = A + B + C$, действием $L = A + B - C$ и количеством движения P должны существовать некоторые соотношения.

Первое из них имеет вид

$$E = L - \beta \frac{dL}{d\beta}$$

а второе

$$\frac{dP}{d\beta} = \frac{1}{\beta}\frac{dE}{d\beta}$$

откуда

$$P = -\frac{dL}{d\beta}, \; E = L + \beta P \qquad (2)$$

Второе из уравнений (2) удовлетворяется всегда, первое же только в том случае, если

$$l = (1 - \beta^2)^{1/6} = \gamma^{-1/3},$$

т.е. если объем воображаемого электрона равен объему действительного электрона или иначе, если объем электрона постоянен. В этом состоит гипотеза Ланжевена.

Это находится в противоречии с результатом § 4 и с результатом, полученным иным путем Лоренцом. Займемся выяснением этого противоречия.

Но прежде чем приступить к этому выяснению, заметим, что какую бы гипотезу мы ни приняли, мы всегда будем иметь

$$L = A + B - C = \frac{l}{\gamma}(A' + B'),$$

или, так так $C' = 0$,

$$L = l\gamma^{-1} L' \tag{3}$$

Этот результат можно сопоставить с уравнением $J = J'$, полученным в § 3.

В самом деле, мы имеем

$$J = \int L dt, J' = \int L' dt'.$$

Замечая, что состояние системы зависит только от $x - \beta t$, y, z, т.е. от x', y', z', получим

$$t' = l\gamma^{-1} t - \beta x',$$

$$dt' = l\gamma^{-1} dt. \tag{4}$$

* Подчеркнем, что формула $dt' = \gamma^{-1} l dt$ выражает известное свойство относительности временных интервалов, определяемых в различных системах координат. В данном случае формула (4) говорит о том, что временной интервал двух событий dt' в одной и той же пространственной точке с координатой x', измеренный в движущейся со скоростью β инерциальной системе отсчета, в $l\sqrt{1 - \beta^2}$ раз отличается от интервала dt, измеренного в покоящейся системе координат.

Сопоставляя уравнения (3) и (4), находим, что

$$J = J'.$$

Примем какую-нибудь гипотезу, будь это гипотеза Лоренца, Абрагама, Ланжевена или какая-нибудь промежуточная гипотеза.

Пусть r, θr, θr будет три полуоси реального электрона; для воображаемого электрона они превратятся в

$$\gamma lr, \quad \theta lr, \quad \theta lr.$$

Тогда $A' + B'$ будет электростатической энергией эллипсоида с осями γlr, θlr, θlr.

Если предположить, что электричество распределено на поверхности электрона как на проводнике, или равномерно распределено внутри этого электрона, то энергия примет вид

$$A' + B' = \frac{\varphi\left(\dfrac{\theta}{\gamma}\right)}{\gamma lr},$$

где φ считается известной функцией.

Гипотеза Абрагама состоит в предположении

$$r = \text{const}, \quad \theta = 1.$$

Согласно же Лоренцу,

$$l = 1, \quad \gamma r = \text{const}, \quad \theta = \gamma.$$

Наконец, согласно Ланжевену,

$$l = \gamma^{-1/3}, \quad \gamma = 0, \quad \gamma lr = \text{const}.$$

Далее находим

$$L = \gamma^{-2} r^{-1} \varphi\left(\frac{\theta}{\gamma}\right).$$

Абрагам в иных обозначениях получает (Gottingen Nachrichten, 1902, стр. 37):

$$L = \frac{a}{r} \cdot \frac{1-\beta^2}{\beta} \log \frac{1-\beta}{1+\beta},$$

где a – постоянная [6]. Но по гипотезе Абрагама $\theta = 1$; поэтому получаем следующее уравнение, определяющее функцию φ:

$$\varphi\left(\frac{1}{\gamma}\right) = a\gamma^2 \frac{1-\beta^2}{\beta} \log \frac{1-\beta}{1+\beta} = \frac{a}{\beta} \log \frac{1-\beta}{1+\beta}. \tag{5}$$

Установив это, представим себе, что электрон подвержен такой связи, что между r и θ существует некоторое соотношение; по гипотезе Лоренца это соотношение имело бы вид $\theta r = \text{const}$, а по Ланжевену $\theta^2 r^3 = \text{const}$.

Допустим более общую зависимость

$$r = b\theta^m,$$

где b – постоянная.

Отсюда

$$L = \frac{1}{b\gamma^2}\theta^{-m}\varphi\left(\frac{\theta}{\gamma}\right).$$

Какую форму примет электрон при скорости, равной β, *если предположить, что кроме сил связи, на него не действуют никакие силы?*

Эта форма определяется равенством

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = 0, \tag{6}$$

или

$$-m\theta^{-m-1}\varphi + \theta^{-m}\gamma^{-1}\varphi' = 0$$

или

$$\frac{\varphi'}{\varphi} = \frac{m\gamma}{\theta}.$$

Если мы желаем, чтобы имело место такое равновесие, при котором $\theta = \gamma$, необходимо, чтобы при $\theta/\gamma = 1$ логарифмическая производная φ была равна m.

Разлагая $\varphi(1/\gamma)$ и правую часть (5) в ряд по степеням ϵ и пренебрегая высшими степенями ϵ, получим

$$\varphi\left(1 - \frac{\beta^2}{2}\right) = a\left(1 + \frac{\beta^2}{3}\right).$$

Дифференцируя, будем иметь

$$-\beta\varphi'\left(1 - \frac{\beta^2}{2}\right) = \frac{2}{3}\beta a.$$

Для $\beta = 0$, т.е. когда аргумент φ равен 1, эти уравнения принимают вид

$$\varphi = a, \quad \varphi' = -\frac{2}{3}a, \quad \frac{\varphi'}{\varphi} = -\frac{2}{3}. \tag{7}$$

Итак, в согласии с гипотезой Ланжевена, должно иметь место $m = -2/3$.

Этот результат должен быть согласован с соответствующим выводом первого уравнения (2), от которого он в сущности не отличается. В самом деле, предположим, что на каждый элемент $d\tau$ электрона действует сила $\vec{f}d\tau$, параллельная оси x, причем $\vec{f}$ одно и то же для всех элементов.

Тогда, по определению количества движения, будем иметь

$$\frac{dP}{dt} = \int f d\tau.$$

С другой стороны, принцип наименьшего действия дает нам

$$\delta J = \int f \delta\xi_x d\tau dt, \quad J = \int L dt, \quad \delta J = \int \delta\xi_x \frac{d}{dt} P\, dt,$$

где $\delta\xi_x$ – перемещение центра тяжести электрона; L зависит от θ и β, если r и θ связаны друг с другом уравнением связи.

Поэтому имеем

$$\delta J = \int\left(\frac{\partial L}{\partial\beta}\delta\beta + \frac{\partial L}{\partial\theta}\delta\theta\right)dt.$$

С другой стороны.

$$\delta\beta = \frac{d}{dt}\delta\xi_x,$$

откуда, интегрируя по частям, получаем

$$\int P\delta\beta dt = -\int \dot{P}\delta\xi_x dt, \quad \dot{P} = \frac{d}{dt}P$$

$$\int\left(\delta\beta\frac{\partial L}{\partial\beta} + \delta\theta\frac{\partial L}{\partial\theta}\right)dt = -\int P\delta\beta dt;$$

отсюда

$$P = -\frac{\partial L}{\partial\beta}, \quad \frac{\partial L}{\partial\theta} = 0.$$

Но производная $\dfrac{dL}{\partial\beta}$, входящая в правую часть уравнения (2), взята в предположении, что θ есть функция от β, поэтому

$$\frac{dL}{d\beta}=\frac{\partial L}{\partial\beta}+\frac{\partial L}{\partial\theta}\cdot\frac{d\theta}{d\beta}$$

Таким образом, уравнение (2) эквивалентно уравнению (6).

Мы заключаем, что если на три оси электрона наложена некоторая связь и *если, кроме сил связи, нет никакой другой силы,* то форма, которую примет электрон при равномерном движении, только тогда будет сфероид для соответствующего воображаемого электрона, когда связь приведет к постоянству объема, в согласии с гипотезой Ланжевена.

Мы пришли, таким образом, к постановке следующей задачи: какими будут те дополнительные силы, кроме сил связи, которые необходимо ввести для того, чтобы прийти к закону Лоренца или, в более общем случае, любому закону, отличному от закона Ланжевена?

Самая простая гипотеза и первая из тех, которые мы должны рассмотреть, состоит в том, что эти дополнительные силы происходят от некоторого потенциала, зависящего от трех осей эллипсоида и, следовательно, от θ и r. Пусть $F(\theta, r)$ будет этим потенциалом.

В этом случае действие

$$J=\int[L+F(\theta,r)]\,dt,$$

и условия равновесия напишутся в виде

$$\frac{\partial L}{\partial\theta}+\frac{\partial F}{\partial\theta}=0,\quad \frac{\partial L}{\partial r}+\frac{\partial F}{\partial r}=0. \tag{8}$$

Предполагая, что r и θ связаны друг с другом соотношением $r=b\theta^m$, мы можем рассматривать r как функцию от θ, считая таким образом, что F зависит только от θ, и сохранить только первое из уравнений (8), где

$$L=\frac{\varphi}{b\gamma^2\theta^m},\quad \frac{dL}{d\theta}=\frac{-m\varphi}{b\gamma^2\theta^{m+1}}+\frac{\varphi'}{b\gamma^3\theta^m}.$$

Необходимо, чтобы уравнение (8) удовлетворялось при $\gamma=\theta$; принимая во внимание уравнения (7), получим

$$\frac{dF}{d\theta}=\frac{ma}{b\theta^{m+3}}+\frac{2}{3}\frac{a}{b\theta^{m+3}},$$

откуда

$$F = \frac{-a}{b\theta^{m+2}} \frac{m+\frac{2}{3}}{m+2},$$

и по гипотезе Лоренца, где $m = -1$,

$$F = \frac{a}{3b\theta}.$$

Допустим теперь, что не имеется *никакой* связи, т.е. будем рассматривать r и θ как независимые переменные; в таком случае сохраняются оба уравнения (8), причем

$$L = \frac{\varphi}{\gamma^2 r}, \quad \frac{dL}{d\theta} = \frac{\varphi'}{\gamma^3 r}, \quad \frac{dL}{dr} = \frac{-\varphi}{\gamma^2 r^2}.$$

Уравнения (8) должны удовлетворяться при $\gamma = \theta$ и $r = b\theta^m$; это дает

$$\frac{dF}{dr} = \frac{a}{b^2\theta^{2m+2}}, \quad \frac{dF}{d\theta} = \frac{2}{3}\frac{a}{b\theta^{m+3}}. \tag{9}$$

Один из способов удовлетворить этим условиям состоит в том, что мы полагаем

$$F = Ar^{\alpha}\theta^{\beta}, \tag{10}$$

где A, α и β — постоянные.

Уравнения (9) должны удовлеторяться при $\gamma = \theta$ и $r = b\theta^m$, что дает

$$A\alpha b^{\alpha-1}\theta^{m\alpha - m + \beta} = \frac{a}{b^2\theta^{2m+2}}, \quad A\beta b^{\alpha}\theta^{m\alpha + \beta - 1} = \frac{2}{3}\frac{a}{b\theta^{m+3}}.$$

Отождествляя, находим

$$\alpha = 3\zeta, \quad \beta = 2\zeta, \quad \zeta = -\frac{m+2}{3m+2}, \quad A = \frac{a}{\alpha b^{\alpha+1}}. \tag{11}$$

Но объем эллипсоида пропорционален $r^3\theta^2$, поэтому добавочный потенциал пропорционален степени ζ объема электрона.

Гипотезе Лоренца соответствует $m = -1, \zeta = 1$.

Таким образом, мы приходим к *гипотезе Лоренца при условии присоединения добавочного потенциала, пропорционального объему электрона.*

Гипотеза Ланжевена соответствует случаю $\zeta = \infty$.

§ 7. Квазистационарное движение

"Возможно даже, мы должны создать совершенно новую механику, которую мы лишь смутно представляем, механику, где инерция возрастала бы со скоростью, причем скорость света являлась бы непреодолимым пределом"

А.Пуанкаре.

Настоящее и будущее математической физики (1904 г).[14]

Остается рассмотреть, учитывает ли эта гипотеза о сокращении электронов невозможность наблюдать абсолютное движение; для этого мы начнем со случая квазистационарного движения электрона, свободного или подверженного только действию других удаленных электронов.

Известно, что квазистационарным движением называется такое движение, при котором изменения скорости настолько медленны, что энергии – электрическая и магнитная – мало отличаются от соответствующих значений для равномерного движения. Известно также, что исходя из этого определения квазистационарного движения, Абрагам пришел к установлению понятий электромагнитных масс – продольной и поперечной.

Уточним эти понятия. Пусть действие за единицу времени равно

$$L = \frac{1}{2}\int d\tau(\vec{E}^2 - \vec{H}^2),$$

где для данного момента мы рассматриваем электрическое и магнитное поля, обусловленные только движением свободного электрона. В предыдущем параграфе, рассматривая движение как равномерное, мы считали, что L зависит от скорости $\vec{v}$ центра тяжести (эти три составляющие имели в предыдущем параграфе значения $-\beta$, 0, 0) и от параметров r и θ, определяющих форму электрона.

Но если движение неравномерно, то L будет зависеть от значений $\vec{v}$, r, θ не только в данный момент, но и от значений этих величин в другие моменты; последние могут отличаться от данного момента на величину, порядок которой равен времени, необходимому для прохождения света от одной точки электрона к другой. Иными словами, L будет зависеть не только от $\vec{v}$, r, θ, но и от их производных всех порядков по времени.

[14] А.Пуанкаре. Доклад на Конгрессе искусства и науки в Сент-Луисе (сентябрь 1904 г.). Опубликовано в журналах: Bulletin des Sciences Mathematiques, December 1904, v. XY, N1 (Перевод с франц. Т.Д.Блохинцевой).

Движение будет квазистационарным тогда, когда последовательными частными производными L по производным $\dot{\vec{v}}$, $\dot{r}$, $\dot{\theta}$ можно пренебречь по сравнению с частными производными L по самим величинам $\vec{v}$, r, θ.

Уравнения такого движения можно записать в виде

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} + \frac{\partial F}{\partial \theta} = \frac{\partial L}{\partial r} + \frac{\partial F}{\partial r} = 0,$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = -\int \vec{f} d\tau. \tag{1}$$

В этих уравнениях $\vec{f}$ имеет то же значение, что и в предыдущем параграфе. $\vec{f} = (f_x, f_y, f_z)$ – составляющие силы, действующие на электрон; эта сила происходит только от электрического и магнитного полей, обусловленных *другими* электронами.

Заметим, что L зависит от $\vec{v}$ только через промежуточную функцию

$$v = |\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2},$$

т.е. через скорость.

Следовательно, обозначая через P количество движения, имеем

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = \frac{\vec{v}}{v}\frac{\partial L}{\partial v} = -\frac{\vec{v}}{v}P,$$

откуда

$$-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = \frac{P}{v}\frac{d\vec{v}}{dt} - P\frac{\vec{v}}{v^2}\frac{dv}{dt} + \frac{\partial P}{\partial v}\frac{\vec{v}}{v}\frac{dv}{dt}, \tag{2}$$

где

$$v\frac{dv}{dt} = \vec{v}\cdot\frac{d\vec{v}}{dt}. \tag{3}$$

Полагая, что истинное направление скорости совпадает с осью x, получим

$$v_{//} = v_x = v, \quad \vec{v}_\perp = (v_y, v_z) = 0, \quad \frac{dv_x}{dt} = \frac{dv}{dt};$$

в соответствии с этим уравнения (2) примут вид

$$-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial v_{//}} = \frac{\partial P}{\partial v}\cdot\frac{dv_{//}}{dt}; \quad -\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \vec{v}_\perp} = \frac{P}{v}\cdot\frac{d\vec{v}_\perp}{dt},$$

а три последних уравнения (1):

$$\frac{\partial P}{\partial v}\cdot\frac{dv_{//}}{dt}=\int f_{//}d\tau;\quad \frac{P}{v}\cdot\frac{d\vec{v}_{\perp}}{dt}=\int \vec{f}_{\perp}d\tau \tag{4}$$

где $f_{//}=f_x$, $\vec{f}_{\perp}=(f_x, f_y)$.

Вот почему Абрагам дал величине $\partial P/\partial v$ название *продольной массы*, а P/v – *поперечной массы;* напомним, что $P = dL/dv$.

По гипотезе Лоренца имеем

$$P=-\frac{dL}{dv}=-\frac{\partial L}{\partial v},$$

где dL/dv представляет производную по v после того, как r и θ заменены в функции v их значениями, полученными из первых двух уравнений (1).

После этой подстановки имеем

$$L=+A\sqrt{1-v^2}.$$

Выберем единицы таким образом, чтобы постоянный множитель A был равен 1; я полагаю также

$$\sqrt{1-v^2}=h.$$

откуда

$$L=+h,\quad P=\frac{v}{h},\quad \frac{dP}{dv}=h^{-3},\quad \frac{dP}{dv}\frac{1}{v^2}-\frac{P}{v^3}=h^{-3}.$$

Положим далее

$$M=v\frac{dv}{dt}=\vec{v}\cdot\frac{d\vec{v}}{dt},\quad \vec{F}=\int\vec{f}d\tau.$$

Следовательно, для уравнения квазистационарного движения получаем

$$h^{-1}\frac{d\vec{v}}{dt}+h^{-3}\cdot\vec{v}\cdot M=\vec{F}. \tag{5}$$

Посмотрим, как изменятся эти уравнения от преобразования Лоренца.

Полагая $1-\beta v_{//}=\mu$ будем иметь прежде всего

$$\mu v'_{//}=v_{//}-\beta,\quad \mu\vec{v}'_{\perp}=\vec{v}_{\perp}/\gamma,$$

откуда легко получаем

$$\mu h'=h/\gamma$$

Мы имеем также

$$dt'=\gamma\mu dt,$$

откуда

$$\frac{dv'_{//}}{dt'}=\frac{1}{\gamma^3\mu^3}\,\frac{dv_{//}}{dt},\ \frac{d\vec{v}'_{\perp}}{dt'}=\frac{1}{\gamma^2\mu^2}\cdot\frac{d\vec{v}_{\perp}}{dt}+\frac{dv_{//}}{dt}\cdot\frac{\vec{v}_{\perp}\beta}{\gamma^2\mu^3},$$

и

$$M'=\gamma^{-3}\mu^{-3}M-\beta h^2\cdot\gamma^{-3}\mu^{-4}\frac{d}{dt}v_{//}$$

$$h'^{-1}\,\frac{dv'_{//}}{dt'}+h'^{-3}v_{//}\cdot M'=\mu^{-1}[h^{-1}\frac{dv_{//}}{dt}+h^{-3}(v_{//}-\beta)M],\tag{6}$$

$$h'^{-1}\,\frac{d\vec{v}'_{\perp}}{dt'}+h'^{-3}\vec{v}'_{\perp}M'=\mu^{-1}h^{-1}[h^{-1}\,\frac{d\vec{v}_{\perp}}{dt}+h^{-3}\vec{v}_{\perp}M].\tag{7}$$

Обратимся к уравнениям (11′) § 1; можно считать, что $\vec{F}=(F_{//},\vec{F}_{\perp})$ имеют в них то же значение, что и в уравнениях (5). С другой стороны, мы имеем $l=1$, и $\rho'/\rho=\gamma\mu$; поэтому эти уравнения примут вид

$$F'_{//}=\mu^{-1}[F_{//}-\beta(\vec{v}\vec{F}],$$

$$\vec{F}'_{\perp}=\gamma^{-1}\mu^{-1}\vec{F}_{\perp}\tag{8}$$

Вычисляя $(\vec{v}\cdot\vec{F})$ при помощи уравнения (5), находим

$$(\vec{v}\cdot\vec{F})=h^{-3}M,$$

откуда

$$F'_{//}=\mu^{-1}[F_{//}-\beta h^{-3}M],\tag{9}$$

$$\vec{F}'_{\perp}=\gamma^{-1}\mu^{-1}\vec{F}_{\perp}$$

Сравнивая уравнения (5), (6), (7) и (9), находим окончательно

$$h'^{-1}\frac{dv'_{//}}{dt'}+h'^{-3}v'_{//}M'=F'_{//},$$

$$h'^{-1}\frac{d\vec{v}'_{\perp}}{dt'}+h'^{-3}\vec{v}'_{\perp}M'=\vec{F}'_{\perp}, \tag{10}$$

а это показывает, что уравнения квазистационарного движения не изменяются от преобразования Лоренца; однако это еще не значит, что только гипотеза Лоренца приводит к такому результату.

* Важно подчеркнуть, что приведенное выше выражение функции Лагранжа $L = h = \sqrt{1-v^2}$ автоматически приводит к четырем уравнениям релятивистской механики.

Первые три из них, даваемые формулами (5), описывают скорость изменения во времени количества движения частицы (единичной массы)

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{v}}{\sqrt{1-v^2}}\right)=\vec{F}.$$

Четвертое уравнение следует из первых трех и имеет вид:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\sqrt{1-v^2}}\right)=h^{-3}M=(\vec{v}\cdot\vec{F}).$$

Далее в §9 (см. стр. 91) Пуанкаре отмечает, что совокупности величин $(\gamma, \gamma\vec{v})$ где $\gamma = 1/\sqrt{1-v^2}$, а также $(\gamma T, \gamma\vec{F})$, где $T = \vec{v}\cdot\vec{F}$, преобразуются при преобразованиях группы Лоренца так же, как время и пространственные координаты, т.е. $(t, \vec{r})$.

Для того, чтобы обосновать это положение, мы ограничимся, как это сделал Лоренц, некоторыми частными случаями, рассмотрение которых будет, очевидно, достаточным для доказательства обратной теоремы.

Прежде всего посмотрим, каким образом мы обобщим гипотезы, на которых основано предыдущее вычисление.

1. Вместо того, чтобы полагать в преобразовании Лоренца $l = 1$, мы будем считать l произвольным.

2. Вместо того, чтобы предполагать, что F пропорционально объему и, следовательно, L пропорционально h, мы положим, что F есть

произвольная функция от θ и r | после замены θ и r их значениями в функции v, полученными из первых двух уравнений (1)|, так что L будет произвольной функцией от v.

Замечу прежде всего, что если положить $L = h$, то $l = 1$, и уравнения (6) и (7) действительно удовлетворяются, если только правые части помножить на $1/l$; так же точно, как и уравнения (9), если их правые части помножить на $1/l^2$, и, наконец, уравнения (10), если правые части будут умножены на $1/l$.

Таким образом, если мы желаем, чтобы уравнения движения не изменялись от преобразования Лоренца, т.е. чтобы уравнения (10) отличались от уравнений (5) только штрихами у букв, необходимо положить

$$l = 1.$$

Предположим теперь, что

$$\vec{v}_\perp = 0,$$

откуда

$$v_{//} = v, \quad \frac{dv_{//}}{dt} = \frac{dv}{dt};$$

уравнения (5) примут вид

$$-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial v_{//}} = \frac{dP}{dv}\frac{dv_{//}}{dt} = F_{//},$$

$$-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \vec{v}_\perp} = \frac{P}{v}\cdot\frac{d\vec{v}_\perp}{dt} = \vec{F}_\perp. \tag{5'}$$

Мы можем, кроме того, положить

$$\frac{dP}{dv} = f(v), \quad \frac{P}{v} = \varphi(v).$$

Если уравнения движения не изменяются от преобразования Лоренца, то должно иметь место

$$f(v)\frac{dv_{//}}{dt} = F_{//},$$

$$\varphi(v)\frac{d\vec{v}_\perp}{dt} = \vec{F}_\perp,$$

$$f(v')\frac{dv'_{//}}{dt} = F'_{//} = l^{-2}\mu^{-1}[F_{//} - \beta(\vec{F}\vec{v})] = l^{-2}\mu^{-1}F_{//}(1-\beta v) = l^{-2}F_{//},$$

$$\varphi(v')\frac{d\vec{v}'_{\perp}}{dt'} = \vec{F}'_{\perp} = l^{-2}\gamma^{-1}\mu^{-1}\vec{F}_{\perp},$$

и, следовательно,

$$f(v)\frac{dv_{//}}{dt} = l^2 f(v')\frac{dv'_{//}}{dt'},$$

$$\varphi(v)\frac{d\vec{v}_{\perp}}{dt} = l^2\gamma\mu\varphi(v')\frac{d\vec{v}'_{\perp}}{dt'}. \tag{11}$$

Но мы имеем

$$\frac{dv'_{//}}{dt'} = \frac{dv_{//}}{dt}\gamma^{-3}\mu^{-3}, \quad \frac{d\vec{v}'_{\perp}}{dt'} = \frac{d\vec{v}_{\perp}}{dt'}\gamma^{-2}\mu^{-2},$$

откуда

$$f(v') = f\left(\frac{v-\beta}{1-\beta v}\right) = f(v)\gamma^3\mu^3 l^{-2},$$

$$\varphi(v') = \varphi\left(\frac{v-\beta}{1-\beta v}\right) = \varphi(v)\gamma\mu l^{-2};$$

отсюда, исключая l^2, получаем следующее функциональное уравнение:

$$\gamma^2\mu^2 \cdot \frac{\varphi\left(\frac{v-\beta}{1-\beta v}\right)}{\varphi(v)} = \frac{f\left(\frac{v-\beta}{1-\beta v}\right)}{f(v)},$$

или, полагая

$$\frac{\varphi(v)}{f(v)} = \Omega(v) = P/v\frac{dP}{dv},$$

получаем уравнение

$$\Omega\left(\frac{v-\beta}{1-\beta v}\right) = \Omega(v)\frac{1-\beta^2}{(1-\beta v)^2},$$

которое должно удовлетворяться при всех значениях v и β. Для $v=0$ будет

$$\Omega(-\beta) = \Omega(0)(1-\beta^2),$$

откуда

$$P = A\left(\frac{v}{\sqrt{1-v^2}}\right)^m,$$

где A – постоянная и $\Omega(0)$ положено равным $1/m$

Теперь находим

$$\varphi(v) = \frac{A}{v}\left(\frac{v}{\sqrt{1-v^2}}\right)^m,$$

$$\varphi(v') = \frac{A\mu}{v-\beta}\left(\frac{v-\beta}{\sqrt{1-v^2}\sqrt{1-\beta^2}}\right)^m.$$

Но $\varphi(v') = \varphi(v)\gamma\mu l^{-2}$; следовательно,

$$(v-\beta)^{m-1}(1-\beta^2)^{-m/2} = v^{m-1}(1-\beta^2)^{-1/2}l^{-2}$$

Ввиду того, что l должно зависеть только от β (так как при наличии нескольких электронов l должно иметь одно и то же значение для всех электронов, скорости ξ которых могут быть различными), то это тождество может иметь место только при

$$m = 1, \quad l = 1.$$

* Итак, здесь Пуанкаре впервые открывает релятивистские уравнения движения для электрона. При этом Пуанкаре дает, по существу, два независимых вывода этих уравнений. Последний вывод основан лишь на свойствах инвариантности относительно преобразований группы Лоренца и не зависит от природы сил, действующих на материальную частицу. Таким образом, установленные здесь уравнения релятивисткой механики имеют всеобщий характер.

\

Итак, гипотеза Лоренца будет единственной, которая согласуется с невозможностью доказательства абсолютного движения; допуская эту невозможность, необходимо принять, что электроны при своем движении сокращаются и превращаются в эллипсоиды вращения, у которых две оси остаются постоянными; следовательно, как мы показали в предыдущем параграфе, необходимо допустить существование добавочного потенциала, пропорционального объему электрона.

Таким образом, результаты Лоренца полностью подтверждаются; мы можем еще раз убедиться в действительной причине исследуемого нами обстоятельства; эту причину следует искать в рассуждениях § 4.

Преобразования, не изменяющие уравнения движения, должны составлять группу, а это может иметь место только при $l=1$.

Так как мы не можем узнать, находится ли электрон в состоянии покоя или в состоянии абсолютного движения, то необходимо, чтобы при своем движении он подвергался деформации, которая должна быть точно такой, какая предписывается ему соответствующим преобразованием группы.

§ 8. Произвольное движение

Предыдущие результаты применимы только к квазистационарному движению, однако их можно легко распространить на общий случай: для этого достаточно применить сказанное в § 3, т.е. исходить из принципа наименьшего действия.

Прибавим к выражению для действия

$$J = \int dt d\tau \left(\frac{\vec{E}^2 - \vec{H}^2}{2} \right)$$

член, представляющий добавочный потенциал F(§ 6); этот член, очевидно, принимает вид

$$J_1 = \int \Sigma(F) dt,$$

где $\Sigma(F)$ представляет сумму добавочных потенциалов, происходящих от различных электронов, каждый из которых пропорционален объему соответствующего электрона.

Тогда полное действие равно $J + J_1$. В § 3 мы видели, что J не изменяется от преобразования Лоренца; покажем теперь, что то же относится и к J_1.

Для каждого из электронов имеем

$$(F) = \omega_0 \tau,$$

где ω_0 коэффициент, характеризующий данный электрон, а τ — его объем; поэтому мы можем написать

$$\Sigma(F) = \int \omega_0 d\tau.$$

Интеграл здесь должен быть распространен по всему пространству и притом так, чтобы коэффициент ω_0 вне электронов был равен нулю, а внутри каждого электрона – коэффициенту, характеризующему этот электрон.

В таком случае имеем

$$J_1 = \int \omega_0 d\tau dt,$$

и после преобразования Лоренца

$$J_1' = \int \omega_0' d\tau' dt'.$$

Но $\omega_0 = \omega_0'$, ибо если точка принадлежит электрону, то соответствующая точка после преобразования Лоренца также принадлежит *тому же самому* электрону. С другой стороны, в § 3 мы нашли

$$d\tau' dt' = l^4 d\tau dt$$

и, так как мы полагаем здесь $l = 1$,

$$d\tau' dt' = d\tau dt.$$

Таким образом, имеем

$$J_1 = J_1'.$$

Следовательно, наша теорема является общей; одновременно она дает нам решение поставленной в конце § 1 задачи: найти добавочные силы, не изменяющиеся от преобразования Лоренца. Добавочный потенциал (F) удовлетворяет этому условию.

Таким образом, мы можем обобщить результат, полученный в конце § 1, и сказать:

Если инерция электронов имеет исключительно электромагнитное происхождение и если электроны подвержены действию только электромагнитных сил или сил, вызываемых добавочным потенциалом (F), то никакой опыт не в состоянии показать наличие абсолютного движения.

Каковы же те силы, которые вызываются потенциалом (F)? Они, очевидно, могут быть уподоблены давлению, господствующему внутри электрона; все происходит так, как если бы каждый электрон был полым пространством, находящимся под постоянным внутренним давлением (независимым от объема); работа такого давления была бы, очевидно, пропорциональна изменениям объема.

Я должен заметить, однако, что это давление отрицательно. Обратимся к уравнению (10) § 6. По гипотезе Лоренца, оно перепишется в виде

$$F = Ar^3 \theta^2.$$

Уравнения (11) § 6 дадут нам

$$A = \frac{a}{3b^4}.$$

Наше давление равно A с точностью до постоянного коэффициента, который отрицателен.

Рассмотренная здесь модель протяженного электрона есть прообраз одной из популярных современных моделей адронов — модели кваркового мешка, ключевым элементом которой является учет объемной плотности энергии протяженной системы, соответствующей отрицательному внутреннему давлению.

Вычислим теперь массу электрона, я имею в виду "экспериментальную массу", т.е. массу при малых скоростях.

Согласно § 6, имеем

$$L = \frac{\varphi\left(\frac{\theta}{\gamma}\right)}{\gamma^2 r}, \quad \theta = \gamma, \quad \varphi = a, \ \theta r = b,$$

откуда

$$L = \frac{a}{b\gamma} = \frac{a}{b}\sqrt{1 - v^2}.$$

Для очень малого v можно написать

$$L = \frac{a}{b}\left(1 - \frac{v^2}{2}\right).$$

Таким образом, масса, как продольная, так и поперечная, равна a/b. Но a есть численная постоянная, и это показывает, что *давление, обусловленное нашим добавочным потенциалом, пропорционально четвертой степени экспериментальной массы электрона.*

Так как ньютоновское притяжение также пропорционально этой экспериментальной массе, то появляется искушение заключить, что между причиной, вызывающей тяготение, и причиной, порождающей этот добавочный потенциал, существует некоторое соотношение.

§ 9. Гипотезы о тяготении

"Масса имеет два аспекта: это и коэффициент инерции, и масса тяготения, входящая в качестве множителя в закон ньютоновского притяжения. Если коэффициент инерции непостоянный, может ли быть постоянной масса притяжения? Вот в чем вопрос".

А.Пуанкаре. Настоящее и будущее математической физики.

Итак, теория Лоренца полностью объясняет невозможность показать опытным путем наличие абсолютного движения в случае, если все силы будут электромагнитного происхождения.

Однако существуют силы, которым нельзя приписывать электромагнитное происхождение, как, например, силы тяготения. В самом деле, может случиться, что две системы тел порождают эквивалентные электромагнитные поля, т.е. оказывают одинаковое действие на наэлектризованные тела и токи, но что, однако, эти две системы оказывают различное гравитационное действие на ньютоновские массы.

Следовательно, поле тяготения отличается от электромагнитного поля. Поэтому Лоренц вынужден был дополнить свою гипотезу предположением, *что силы любого происхождения, и в частности силы тяготения, ведут себя при поступательном движении* (или, если угодно, при преобразовании Лоренца) *совершенно так же, как электромагнитные силы.*

Нам необходимо теперь заняться более детальным рассмотрением этой гипотезы. Если мы желаем, чтобы ньютоновская сила вела себя указанным образом при преобразовании Лоренца, то мы уже не можем предполагать, что эта сила зависит только от относительного положения двух притягивающихся тел в рассматриваемый момент. Она должна зависеть, кроме того, от скоростей обоих тел. Но это не все: естественно предположить, что если сила, действующая в момент t на притягиваемое тело, зависит от положения и скорости этого тела в этот же момент, то она зависит, кроме того, от положения и скорости *притягивающего* тела, но уже не в момент t, а *в предшествующий момент,* как если бы силы тяготения требовали некоторого времени для своего распространения.

Будем рассматривать, таким образом, положение притягиваемого тела в момент t_0 и пусть $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ будут его координаты в этот момент, а $\vec{v}$ – составляющие его скорости. Рассмотрим, с другой стороны, притягивающее тело в момент $t_0 + t$ и пусть в этот момент его координатами будут $\vec{r}_0 + \vec{r}$, а составляющими скорости $\vec{v}_1$.

Прежде всего, мы должны получить соотношение для определения времени t

$$\varphi(t, \vec{r}, \vec{v}, \vec{v}_1) = 0 \tag{1}$$

Это соотношение определит закон распространения сил тяготения (при этом мы вовсе не предполагаем, что распространение происходит с одинаковой скоростью по всем направлениям).

Пусть теперь $\vec{F} = (F_x, F_y, F_z)$ будут тремя составляющими силы действующей в момент t на притягиваемое тело. Задача заключается в том, чтобы выразить $\vec{F} = (F_x, F_y, F_z)$ как функции от

$$t, \vec{r}, \vec{v}, \vec{v}_1. \tag{2}$$

Какие условия должны быть при этом выполнены?

1. Соотношение (1) не должно меняться от преобразований группы Лоренца.

2. Составляющие $\vec{F} = (F_x, F_y, F_z)$ должны вести себя при преобразовании Лоренца так же, как электромагнитные силы, обозначаемые теми же буквами, т.е. согласно уравнениям (11) § 1.

3. Когда оба тела находятся в покое, мы должны вернуться к обычному виду закона притяжения.

Важно отметить, что в этом последнем случае соотношение (1) не имеет места, ибо, когда оба тела находятся в покое, время t уже не играет никакой роли.

Задача, поставленная таким образом, является, очевидно, неопределенной. Поэтому мы попытаемся удовлетворить, насколько возможно, другим дополнительным условиям.

4. Так как астрономические наблюдения не обнаруживают, по-видимому, заметных отклонений от закона Ньютона, то мы выберем решение, наименее расходящееся с этим законом для малых скоростей обоих тел.

5. Попытаемся распорядиться так, чтобы время t всегда было отрицательным; в самом деле, если понятно, что гравитационный эффект требует некоторого времени для своего распространения, то очень трудно усмотреть, каким образом этот эффект может зависеть от *недостигнутого еще* положения притягивающего тела.

Существует случай, когда неопределенность задачи исчезает; это происходит тогда, когда два тела находятся в *относительном* покое одно по отношению к другому, т.е. когда

$$\vec{v} = \vec{v}_1 ;$$

поэтому рассмотрим сначала этот случай, полагая, что скорости постоянны, т.е. что оба тела участвуют в общем движении переноса, равномерном и прямолинейном.

Положим, что ось x параллельна направлению этого переноса, так что $\vec{v}_\perp = 0$, и возмем $\beta = v_x = v_{//}$.

Применяя при этих условиях преобразование Лоренца, получим, что после преобразования оба тела будут находиться в состоянии покоя, и, следовательно,

$$\vec{v}\,' = 0 \quad .$$

Так как составляющие $\vec{F}'$ должны удовлетворять закону Ньютона, то мы будем иметь с точностью до постоянного множителя

$$\vec{F}' = -\vec{r}\,'/r'^3 ; \;\; r'^2 = \vec{r}\,'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 . \tag{3}$$

Но, согласно § 1,

$$x' = \gamma(x - \beta t), \;\; y' = y, \;\; z' = z, \;\; t' = \gamma(t - \beta x),$$

$$\frac{\rho'}{\rho} = \gamma(1 - \beta v_x) = \gamma(1 - \beta^2) = \gamma^{-1}, \;\; \vec{F}\vec{v} = F_{/}\beta,$$

$$F'_{//} = \gamma \frac{\rho}{\rho'}(F_{//} - \beta \vec{F} \cdot \vec{v}) = \gamma^2 F_{//}(1 - \beta^2) = F_{//},$$

$$\vec{F}'_\perp = \frac{\rho}{\rho'}\vec{F}_\perp = \gamma \vec{F}_\perp \; .$$

Кроме того, имеем

$$x - \beta t = x - v_{//}t, \; r'^2 = \gamma^2(x - v t)^2 + y^2 + z^2$$

и

$$F_{//} = -\gamma(x - v_{//}t)/r'^3, \; \vec{F}_\perp = -\vec{r}_\perp/\gamma r'^3 , \tag{4}$$

что можно написать в виде

$$F_x = \frac{\partial V}{\partial x} \;, \; F_y = \frac{\partial V}{\partial y}, \; F_z = \frac{\partial V}{\partial z}, \; V = 1/\gamma r'. \tag{4'}$$

С первого взгляда кажется, что здесь имеется неопределенность, так как мы не сделали никакого предположения о значении t, т.е. о скорости распространения; к тому же x есть функция от t; однако, легко видеть, что в наши формулы входят только выражения $x - v_{//} t$, y, z, которые не зависят от t.

Очевидно, если два тела участвуют в общем переносе, то сила, действующая на притягиваемое тело, нормальна к эллипсоиду, имеющему в качестве центра притягивающее тело.

Для того чтобы идти дальше, необходимо найти *инварианты группы Лоренца.*

* Дальнейшее изложение представляет собой общую формулировку основ теории относительности, включая тензорное исчисление и исследование инвариантов группы Лоренца, соответствующих релятивистски инвариантным физическим величинам и соотношениям.

Пуанкаре впервые рассматривает здесь преобразования группы Лоренца как элементы преобразований четырехмерного многообразия, координатами точек которого служат совокупности пространственных координат x, y, z и "мнимого" времени $t\sqrt{-1}$, сохраняющих квадратичную форму $x^2 + y^2 + z^2 - t^2$.

Минковский развил впоследствии эти мысли о единстве пространства и времени, геометрия которого псевдоевклидова. В своем знаменитом выступлении перед собранием немецких естествоиспытателей и врачей в Кельне, которое имело решающее значение для широкого признания теории относительности, Г.Минковский выразил эти идеи следующим образом:

"Милостивые господа! Воззрения на пространство и время, которые я намерен перед вами развить, возникли на экспериментально-физической основе. В этом их сила. Их тенденция радикальна. Отныне пространство само по себе и время само по себе должны обратиться в фикции и лишь некоторый вид соединения обоих должен еще сохранить самостоятельность"[15]

[15] Р.Минковский. Raum und Zeit, Доклад, сделанный 21 сентября 1908 г. на 80-м собрании немецких естествоиспытателей и врачей в Кельне Phys. ZS, 1909, b. 10, S. 104).

Мы знаем, что подстановки этой группы (при $l = 1$) являются линейными подстановками, не изменяющими квадратичной формы

$$x^2 + y^2 + z^2 - t^2.$$

Положим, с другой стороны,

$$\vec{v} = \delta\vec{r}/\delta t,\ \delta\vec{r} = (\delta x,\ \delta y,\ \delta z),$$

$$\vec{v}_1 = \delta_1\vec{r}/\delta_1 t,\ \delta_1\vec{r} = (\delta_1 x,\ \delta_1 y,\ \delta_1 z).$$

Мы видим, что в результате преобразования Лоренца величины δx, δy, δz, δt и $\delta_1 x$, $\delta_1 y$, $\delta_1 z$, $\delta_1 t$ подвергаются таким же линейным подстановкам, как x, y, z, t.

Будем рассматривать

$$x, \quad y, \quad z, \quad t\sqrt{-1},$$

$$\delta x, \quad \delta y, \quad \delta z, \quad \delta t\sqrt{-1},$$

$$\delta_1 x,\ \delta_1 y,\ \delta_1 z,\ \delta_1 t\sqrt{-1},$$

как координаты трех точек P, P', P'' в пространстве четырех измерений.

Легко видеть, что преобразование Лоренца представляет не что иное, как поворот в этом пространстве вокруг начала координат, рассматриваемого неподвижным.

Таким образом, отличными друг от друга инвариантами будут только шесть расстояний между тремя точками P, P', P'' и началом координат, или, если угодно, два выражения

$$x^2 + y^2 + z^2 - t^2, \quad x\delta x + y\delta y + z\delta z - t\delta t,$$

или четыре выражения такой же формы, получающиеся в результате любой перестановки трех точек P, P', P''.

Но инварианты, которые мы пытаемся найти, являются функциями десяти переменных (2); поэтому мы должны отыскать между комбинациями из наших шести инвариантов те из них, которые зависят только лишь от этих десяти переменных, т.е. те, которые являются однородными функциями степени 0 как по отношению к δx, δy, δz, δt, так и по отношению к $\delta_1 x$, $\delta_1 y$, $\delta_1 z$, $\delta_1 t$.

Таким образом, нам остаются следующие четыре различных инварианта:

$$\vec{r}^2 - t^2, \frac{t - \vec{r}\cdot\vec{v}}{\sqrt{1-\vec{v}^2}}, \frac{t - \vec{r}\vec{v}_1}{\sqrt{1-\vec{v}_1^2}}, \frac{1 - \vec{v}\cdot\vec{v}_1}{\sqrt{1-\vec{v}^2}\cdot\sqrt{1-\vec{v}_1^2}}. \tag{5}$$

Займемся теперь преобразованиями, которым подвергаются составляющие силы; обратимся к уравнениям (11) § 1, которые относятся не к силе $\vec{F}$, рассматриваемой нами сейчас, а к силе, отнесенной к единице объема.

Полагая, кроме того,

$$f_t = \vec{f}\cdot\vec{v},$$

мы видим, что эти уравнения (11) можно (при $l = 1$) переписать в виде

$$f'_x = \gamma(f_x - \beta f_t), \quad f'_t = \gamma(f_t - \beta f_x),$$

$$f'_y = f_y, f'_z = f_z. \tag{6}$$

Таким образом, f_x, f_y, f_z, f_t преобразуются так же, как и x, y, z, t. Следовательно, инвариантами группы будут следующие выражения:

$$\vec{f}^2 - f_t^2, \vec{f}\cdot\vec{r} - f_t\cdot t, \vec{f}\cdot\delta\vec{r} - f_t\,\delta t,$$

$$\vec{f}\cdot\delta_1\vec{r} - f_t\cdot\delta_1 t.$$

Однако нам нужны не $\vec{f}$, а $\vec{F}$, причем

$$T = \vec{F}\cdot\vec{v}.$$

Мы видим, что

$$\vec{F}/\vec{f} = T/f_t = 1/\rho.$$

Таким образом, преобразование Лоренца действует на $\vec{F}$, T точно так же, как и на f, f_t, с той разницей, что эти выражения будут умножены, кроме того, на

$$\frac{\rho}{\rho'} = \frac{1}{\gamma(1-\beta v_x)} = \frac{\delta t}{\delta t'}.$$

аналогично, на величины $\vec{v}$, 1 оно будет действовать таким же образом, как и на δx, δy, δz, δt, с той, однако, разницей, что эти последние выражения будут умножены, кроме того, на *один и тот же* множитель.

$$\frac{\delta t}{\delta t'} = \frac{1}{\gamma(1-\beta v_x)}.$$

Будем рассматривать затем f_x, f_y, f_z, f_t как координаты некоторой четвертой точки Q; тогда инвариантами будут служить функции взаимных расстояний пяти точек O, P, P', P'', Q; среди этих функций мы должны оставить только те, которые являются однородными степени 0, с одной стороны, по отношению к $f_x, f_y, f_z, f_t, \delta x, \delta y, \delta z, \delta t$ (переменные, которые можно заменить потом на $F_x, F_y, F_z, T, \vec{v}$, 1) и, с другой стороны, по отношению к δx_1, δy_1, δz_1 , 1 (переменные, которые также можно заменить затем на $\vec{v}_1$, 1).

Таким образом, кроме прежних четырех инвариантов (5), мы находим следующие четыре новых различных инварианта:

$$\frac{\vec{F}^2-T^2}{1-\vec{v}^2}, \frac{\vec{F}\cdot\vec{r}-T\cdot t}{\sqrt{1-\vec{v}^2}}, \frac{\vec{F}\cdot\vec{v}_1-T}{\sqrt{1-\vec{v}^2}\sqrt{1-\vec{v}_1^2}}, \frac{\vec{F}\cdot\vec{v}-T}{1-\vec{v}^2}. \tag{7}$$

Согласно определению T , последний инвариант всегда равен нулю.

Установив все это, посмотрим, какие условия должны быть выполнены.

1. Первая часть соотношения (1), определяющая скорость распространения, должна быть функцией от четырех инвариантов (5).

Здесь, очевидно, возможно множество гипотез, из которых мы рассмотрим только две.

А. Можно положить

$$\vec{r}^2 - t^2 = r^2 - t^2 = 0,$$

откуда $t = \pm r$, а так как t должно быть отрицательным, то

$$t = -r.$$

Это говорит о том, что скорость распространения равна скорости света.

На первый взгляд может показаться, что эта гипотеза должна быть сразу же отброшена без дальнейшего обсуждения. В самом деле, Лаплас показал, что распространение сил тяготения происходит или мгновенно, или со скоростью, во много раз превосходящей скорость света. Однако Лаплас рассматривал гипотезу конечной скорости распространения ceteris non mutatis (при прочих неизменных условиях); здесь же, напротив, эта гипотеза осложнена многими другими, и может случиться, что между ними будет иметь место более или менее полная компенсация, вроде той, что мы неоднократно видели на многочисленных примерах в результате преобразования Лоренца.

Б. Можно положить

$$\frac{t-\vec{r}\cdot\vec{v}_1}{\sqrt{1-\vec{v}_1^2}}=0, \quad t=\vec{r}\cdot\vec{v}_1.$$

При этом скорость распространения гораздо больше скорости света; однако в некоторых случаях t может быть положительным, что, как уже было сказано, представляется малоприемлемым. *Поэтому мы будем придерживаться гипотезы* (А).

2. Четыре инварианта (7) должны быть функциями инвариантов (5).

3. Если два тела находятся в абсолютном покое, то $\vec{F}$ должны иметь значения, соответствующие закону Ньютона; если же они находятся в относительном покое, эти значения получаются из уравнений (4).

По гипотезе абсолютного покоя, первые два инварианта (7) должны приводиться к

$$\vec{F}^2, \ \vec{F}\cdot\vec{r},$$

или по закону Ньютона к

$$\frac{1}{r^4}, \ -\frac{1}{r}.$$

С другой стороны, по гипотезе (А) второй и третий инварианты (5) приводятся к

$$-\frac{r+\vec{r}\cdot\vec{v}}{\sqrt{1-\vec{v}^2}}, \quad -\frac{r+\vec{r}\cdot\vec{v}_1}{\sqrt{1-\vec{v}_1^2}},$$

т.е. при абсолютном покое к

$$-r, \ -r.$$

Мы можем допустить *в качестве примера,* что два первых инварианта (7) сводятся к

$$(1-\vec{v}_1^2)^2/(r+\vec{r}\cdot\vec{v}_1)^4, \quad -\sqrt{1-\vec{v}_1^2}\Big/\left(r+\vec{r}\vec{v}_1\right),$$

хотя возможны и другие комбинации.

Необходимо сделать выбор среди этих комбинаций и, кроме того, нам нужно еще третье уравнение для определения $\vec{F}$. Для подобного выбора мы должны стремиться, насколько возможно, не отдаляться от закона Ньютона. Посмотрим теперь, что получается, если пренебречь квадратами скоростей $\vec{v}, \vec{v}_1$ (полагая по-прежнему $t = -r$).

Четыре инварианта (5) приводятся тогда к виду

$$0, \quad -r-\vec{r}\cdot\vec{v}, \quad -r-\vec{r}\cdot\vec{v}_1, \ 1,$$

а четыре инварианта (7) к виду

$$\vec{F}^2, \quad \vec{F}(\vec{r}+\vec{v}\,r), \vec{F}(\vec{v}_1-\vec{v}), \quad 0.$$

Однако для того чтобы иметь возможность сравнить это с законом Ньютона, необходимо другое преобразование; здесь $x_0 + x$, $y_0 + y$, $z_0 + z$ представляют координаты притягивающего тела в момент времени $t_0 + t$ и $r = |\vec{r}|$, в законе же Ньютона нужно рассматривать координаты $x_0 + x_1$, $y_0 + y_1$, $z_0 + z_1$ притягивающего тела в момент t_0 и расстояние $r_1 = |\vec{r}_1|$.

Мы можем пренебречь квадратом времени t, необходимого для распространения, и, следовательно, поступать так, как если бы движение было равномерным.

В таком случае получим

$$\vec{r} = \vec{r}_1 + \vec{v}_1 t, \ r(r-r_1) = t(\vec{r}\cdot\vec{v}_1)$$

или, так как

$$t = -r, \quad \vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{v}_1 r, \ r = r_1 - \vec{r}\cdot\vec{v}_1,$$

наши четыре инварианта (5) станут равными

$$0, \quad -r_1 + \vec{r}\cdot(\vec{v}_1-\vec{v}), \quad -r_1, \quad 1.$$

а четыре инварианта (7) –

$$\vec{F}^2, \quad \vec{F}\cdot[\vec{r}_1 + (\vec{v}-\vec{v}_1)\,r_1], \quad \vec{F}\cdot(\vec{v}_1-\vec{v}), \quad 0.$$

Во втором из этих выражений мы написали r_1 вместо r, потому что r умножено здесь на $v-v_1$ а квадратом v мы пренебрегаем.

С другой стороны, по закону Ньютона мы получили бы для этих четырех инвариантов (7)

$$\frac{1}{r_1^4}, \quad -\frac{1}{r_1}-\frac{\vec{r}_1\cdot(\vec{v}-\vec{v}_1)}{r_1^2}, \quad \frac{\vec{r}_1\cdot(\vec{v}-\vec{v}_1)}{r_1^3}, \quad 0.$$

Следовательно, если мы обозначим второй и третий инварианты (5) через A и B, а первые три инварианта (7) через M, N, P, то мы удовлетворим закону Ньютона с точностью до членов второго порядка малости, положив

$$M=\frac{1}{B^4}, \quad N=\pm\frac{A}{B^2}, \quad P=\frac{A-B}{B^3}. \tag{8}$$

Это решение не единственное.

В самом деле, пусть C есть четвертый инвариант (5) и пусть $C-1$ имеет порядок квадрата v так же как и $(A-B)^2$.

Таким образом, мы можем прибавить к правым частям каждого из уравнений (8) член, составленный из $C-1$, умноженного на произвольную функцию от A, B, C, и член $(A-B)^2$, также умноженный на функцию от A, B, C.

Решение (8) кажется, на первый взгляд, наиболее простым, но тем не менее оно не может быть принято. В самом деле, так как M, N, P являются функциями от $\vec{F}$ и от $T=\vec{F}\cdot\vec{v}$, то из этих трех уравнений (8) можно получить значения $\vec{F}$, однако в некоторых случаях эти значения становятся мнимыми.

Для того, чтобы избавиться от такого неудобства, поступим следующим образом.

Положим

$$\gamma_0=\frac{1}{\sqrt{1-\vec{v}^2}}, \quad \gamma_1=\frac{1}{\sqrt{1-\vec{v}_1^2}},$$

что оправдывается аналогией с обозначением

$$\gamma=\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

фигурирующим в подстановке Лоренца.

В этом случае, а также в силу условия $-r = t$, инварианты (5) приводятся к

$$0,\quad A = -\gamma_0(r + \vec{r}\cdot\vec{v}),\quad B = -\gamma_1(r + \vec{r}\cdot\vec{v}_1),$$

$$C = \gamma_0\gamma_1(1 - \vec{v}\cdot\vec{v}_1).$$

С другой стороны, мы видим, что следующие системы величин:

$$\begin{array}{cccc} x, & y, & z, & t = -r, \\ \gamma_0 F_x, & \gamma_0 F_y, & \gamma_0 F_z, & \gamma_0 T, \\ \gamma_0 v_x, & \gamma_0 v_y, & \gamma_0 v_z, & \gamma_0, \\ \gamma_1 v_{1x}, & \gamma_1 v_{1y}, & \gamma_1 v_{1z}, & \gamma_1, \end{array}$$

подвергаются *таким же самым* линейным подстановкам, как и при преобразовании группы Лоренца.

*Здесь Пуанкаре впервые вводит совокупности величин $F_\mu = (\gamma_0 T, \gamma_0 \vec{F})$ и $u_\mu = (\gamma_0, \gamma_0 \vec{v})$, преобразующиеся по тому же линейному неприводимому (тензорному) закону, что и совокупность пространственно-временных координат $x_\mu = (t, \vec{x})$, и носящее ныне названия 4-векторов силы и скорости. При этом, тождественно выполняются соотношения $u_\mu^2 = 1$ и $u_\mu F_\mu = 0$.

Таким образом, мы приходим к следующим уравнениям:

$$\vec{F} = a\vec{r}/\gamma_0 + b\vec{v} + c\vec{v}_1\gamma_1/\gamma_0,$$

$$T = -ar/\gamma_0 + b + c\gamma_1/\gamma_0. \tag{9}$$

Ясно, что если a, b, c – инварианты, то $\vec{F}$, T удовлетворяют основному условию, т.е. подвергаются вследствие преобразования Лоренца соответствующей линейной подстановке.

Но для того чтобы уравнения (9) были совместны, необходимо, чтобы

$$\vec{F}\cdot\vec{v} - T = 0$$

или, после замены $\vec{F}$, T их значениями из (9) и умножения на γ_0^2,

$$-Aa - b - Cc = 0. \tag{10}$$

Мы хотим, чтобы при отбрасывании, по сравнению с квадратом скоростей света, квадратов скоростей $\vec{v}$, $\vec{v}_1$, а также произведений ускорений на расстояния, как мы это делали выше, значения $\vec{F}$ оставались соответствующими закону Ньютона.

Мы можем положить

$$b = 0, \quad c = -aA/C.$$

С точностью до приближения принятого нами порядка будем иметь

$$\gamma_0 = \gamma_1 = 1, C = 1, A = -r_1 + \vec{r}(\vec{v}_1 - \vec{v}), \ B = -r_1,$$

$$\vec{r} = \vec{r}_1 + \vec{v}_1 t = \vec{r}_1 - \vec{v}_1 r.$$

Первое уравнение (9) примет тогда вид

$$\vec{F} = a(\vec{r} - A\vec{v}_1).$$

Но если пренебречь квадратом v, то Av_1 можно заменить на $-r_1 v_1$ или на $-rv_1$, что дает

$$\vec{F} = a(\vec{r} + \vec{v}_1 r) = a\vec{r}_1.$$

По закону же Ньютона мы получили бы

$$\vec{F} = -\vec{r}_1/r_1^3.$$

Таким образом, для инварианта a мы должны выбрать тот, который приводится к $-1/r_1^3$ при точности порядка допущенного приближения, т.е. $1/B^3$.

Уравнения (9) принимают вид

$$\vec{F} = \vec{r}/\gamma_0 B^3 - \gamma_1 A\vec{v}_1/\gamma_0 B^3 C,$$

$$T = -r/\gamma_0 B^3 - \gamma_1 A/\gamma_0 B^3 C. \tag{11}$$

Отсюда мы видим прежде всего, что исправленное выражение для притяжения состоит из двух составляющих: одна параллельна вектору, соединяющему местоположения обоих тел, а другая параллельна скорости притягивающего тела.

Напомним, что когда мы говорим о положении или скорости притягивающего тела, то при этом речь идет о положении или скорости в момент, когда гравитационная волна покидает его; наоборот, для притягиваемого тела речь идет при этом о его положении или скорости в момент, когда гравитационная волна достигает его; предполагается, что эта волна распространяется со скоростью света.

Я полагаю, что было бы преждевременно более подробно обсуждать эти формулы. Поэтому ограничимся несколькими замечаниями.

1. Решения (11) не единственны; в самом деле, величину $1/B^3$, входящую всюду как множитель, можно заменить на

$$\frac{1}{B^3} + (C-1)f_1(A, B, C) + (A-B)^2 f_2(A, B, C),$$

где f_1 и f_2 – произвольные функции от A, B, C, или же не считать больше b равным нулю, а прибавить к a, b, c какие-нибудь добавочные члены, лишь бы только они удовлетворяли условию (10) и были второго порядка относительно v в части, относящейся к a, и первого порядка относительно v и c.

2. Первое уравнение (11) можно переписать в виде

$$\vec{F} = -\frac{\gamma_1}{B^3 C}[\vec{r}(1 - \vec{v}\cdot\vec{v}_1) + \vec{v}_1(r + \vec{r}\cdot\vec{v})], \tag{11'}$$

причем выражение в квадратных скобках также можно переписать как

$$(\vec{r} + \vec{v}_1 r) + [\vec{v} \times [\vec{v}_1 \times \vec{r}\,]\,]. \tag{12}$$

Таким образом, полную силу можно разложить на три составляющие, соответствующие трем скобкам в выражении (12); первая составляющая имеет некоторую аналогию с механической силой, обусловленной электрическим полем, а две другие – с механической силой, обусловленной магнитным полем. Для того чтобы дополнить аналогию, мы можем, согласно замечанию 1, заменить в уравнении (11) $1/B^3$ на C/B^3 так, чтобы $\vec{F}$ зависели только линейно от скорости $\vec{v}$ притягиваемого тела, так как C при этом из знаменателя (11′) исчезает. Положим далее

$$\vec{e} = \gamma_1(\vec{r} + r\vec{v}_1), \quad \vec{h} = \gamma_1[\vec{v}_1 \times \vec{r}\,], \tag{13}$$

а так как C исчезло из знаменателя (11′), то

$$\vec{F} = \frac{1}{B^3}\vec{e} + \frac{1}{B^3}[\vec{v}\times\vec{h}\,], \qquad (14)$$

к тому же будем иметь

$$B^2 = \vec{e}^{\,2} - \vec{h}^{\,2}. \qquad (15)$$

При этом $\vec{e}$ или $\vec{e}/B^3$ играют роль электрического поля, в то время как $\vec{h}$, или, вернее $\vec{h}/B^3$ – роль магнитного поля.

3. Постулат относительности обязывает нас принять решение (11) или решение (14), или какое-нибудь из решений, получаемых при учете замечания 1. Однако прежде всего следует задать себе вопрос, совместимы ли эти решения с астрономическими наблюдениями. Расхождение с законом Ньютона будет порядка v^2, т.е. в 10000 раз меньше, чем если бы оно было порядка v, т.е. если бы силы тяготения распространялись со скоростью света, cetěris non mutatus; поэтому можно надеяться, что это расхождение не слишком велико. Однако только обстоятельное обсуждение может полностью осветить этот вопрос.

* Перечислим кратко некоторые основные результаты, полученные Пуанкаре в этой работе.

Впервые сформулирован принцип относительности для всех физических явлений.

Впервые показано, что преобразования Лоренца вместе с пространственными вращениями образуют группу, которая была названа Пуанкаре группой Лоренца. Построены инфинитезимальные операторы группы Лоренца. Открыт факт инвариантности квадратичной формы $t^2 - x^2 - y^2 - z^2$ при преобразованиях группы Лоренца.

Установлено, что такие различные физические величины, как $(\rho, \rho v_x, \rho v_y, \rho v_z)$ – плотность заряда и ток, (φ, A_x, A_y, A_z) – скалярный и векторный потенциалы, (f_t, f_x, f_y, f_z) – работа в единицу времени и сила, отнесенные к единице объема,

или $$\left(\frac{\vec{F}\,\vec{v}}{\sqrt{1-v^2}}, \frac{F_x}{\sqrt{1-v^2}}, \frac{F_y}{\sqrt{1-v^2}}, \frac{F_z}{\sqrt{1-v^2}}\right) -$$

где $\vec{F}\vec{v}$ – работа в единицу времени и F – сила, отнесенная к единице заряда,

$\left(\frac{1}{\sqrt{1-v^2}}, \frac{v_x}{\sqrt{1-v^2}}, \frac{v_y}{\sqrt{1-v^2}}, \frac{v_z}{\sqrt{1-v^2}}\right)$ – 4-компонентная скорость или момент количества движения, отнесенные к единичной массе, все преобразуются при преобразованиях группы Лоренца как время и пространственные координаты (t, x, y, z).

С помощью этих законов преобразования Пуанкаре впервые установил, что уравнения Максвелла-Лоренца, а также, и что очень важно, сила Лоренца, действующая на элемент заряда в единице объема, не изменяют своего вида при преобразованиях группы Лоренца. Этим самым было строго показано, что никакими электромагнитными явлениями нельзя установить, находитесь ли вы в состоянии покоя или прямолинейного и равномерного движения.

Таким образом, Пуанкаре показал, что из уравнений Максвелла-Лоренца принцип относительности для электромагнитных явлений следует как строгая математическая истина.

Пуанкаре впервые установил релятивистский закон сложения скоростей.

Им первым была показана инвариантность интеграла действия для электромагнитного поля при преобразованиях группы Лоренца, открыты фундаментальные инварианты электромагнитного поля

$$\vec{E}^2 - \vec{H}^2, \quad \vec{E}\cdot\vec{H}.$$

Пуанкаре первым открыл уравнения релятивистской механики (в единицах $m = c = 1$):

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{v}}{\sqrt{1-v^2}}\right) = \vec{F},$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\sqrt{1-v^2}}\right) = \vec{F}\cdot\vec{v},$$

и написал соответствующее им выражение для функции Лагранжа движущейся материальной точки.

Пуанкаре ввел пространство четырех измерений с координатами (x, y, z, $t\sqrt{-1}$) и показал, что преобразования группы Лоренца соответствуют различным поворотам в этом пространстве вокруг начала координат. Построил различные инварианты группы Лоренца.

Им была выдвинута гипотеза, что все силы природы, включая гравитационные, должны преобразовываться одинаковым образом при преобразованиях Лоренца.

Пуанкаре ввел представление о гравитационных волнах, распространяющихся со скоростью света. Показал, что гипотеза о распространении сил гравитационного притяжения со скоростью света не противоречит наблюдательным данным.

А.А. Логунов

К работам Анри Пуанкаре
" О ДИНАМИКЕ ЭЛЕКТРОНА"

Редактор В.Г. Лапчинский
Художественно-технический редактор Н.Л. Нольде
Корректор А.Ю. Игнатьев

Т-04767. Подписано в печать 25.07.84 г. Ф-т 60x84/16. Уч.-изд. л. 5,5.
Печать офсетная. Тираж 3000 экз. Заказ № 1692. Цена 98 коп.

Издательский отдел Института ядерных исследований АН СССР
113152, Москва, Загородное шоссе, д. 10, корп. 9

Типография Издательства Московского университета
119899, Москва, Ленинские горы.